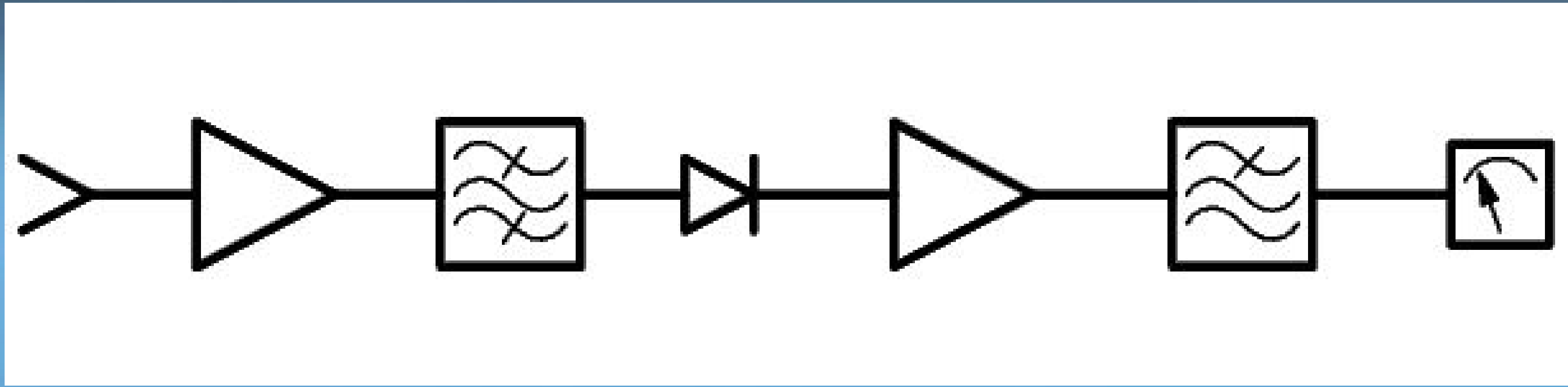
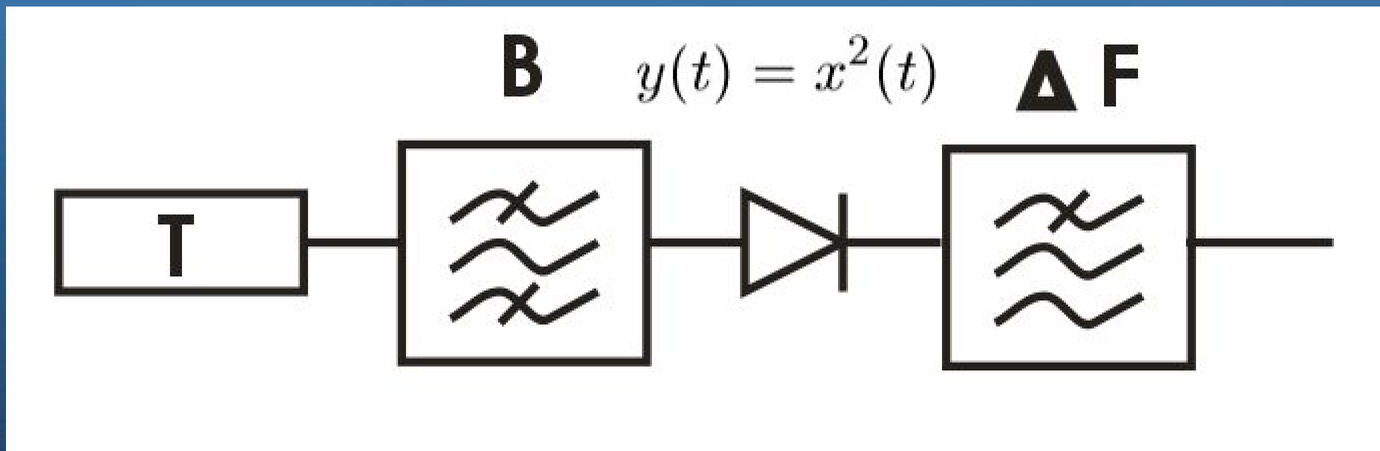
О чувствительности радиометров континуума

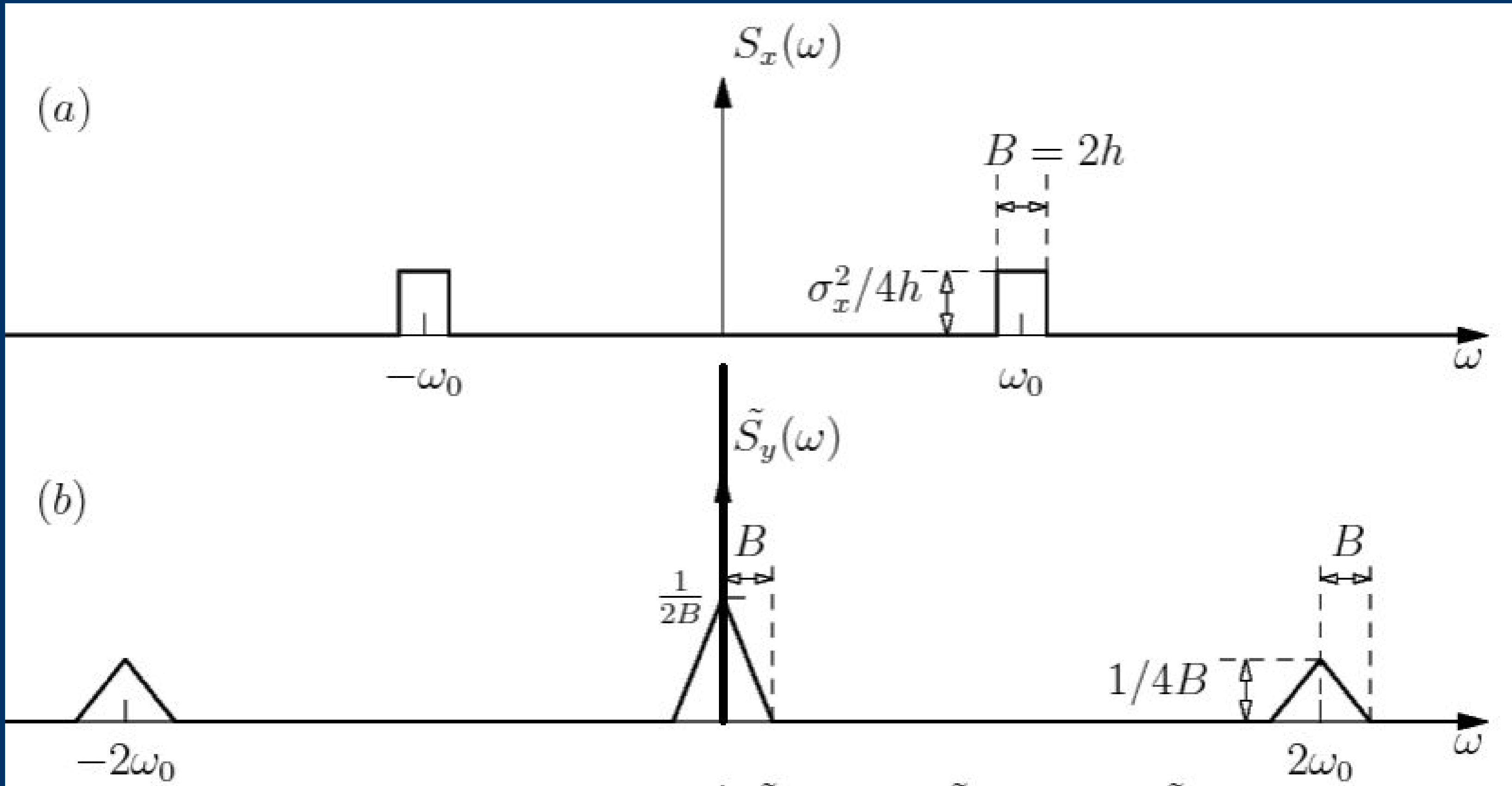
Цыбулев П.
САО РАН



Радиометр полной мощности



Спектральные плотности мощности на входе КД и на выходе. Модель СВЧ сигнала радиометра: **“Ограниченный по частоте белый шум” с гауссовой плотностью вероятности, среднее равно нулю**



$$\overline{y}^2 : \sigma_{yL}^2 : \sigma_{yH}^2 = 1 : 1 : 1$$

$$\tilde{S}_y(\omega) = \frac{1}{8h^2}\begin{cases} 0 & \omega <= -2\omega_0 - 2h \\ \dfrac{\omega + 2\omega_0 + 2h}{2} & \omega <= -2\omega_0 \\ \dfrac{\omega + 2\omega_0 + 2h}{-2} & \omega <= -2\omega_0 + 2h \\ 0 & \omega <= -2h \\ +\omega + 2h & \omega <= 0 \\ -\omega + 2h & \omega <= 2h \\ 0 & \omega <= 2\omega_0 - 2h \\ \dfrac{\omega - 2\omega_0 + 2h}{2} & \omega <= 2\omega_0 \\ \dfrac{\omega - 2\omega_0 - 2h}{-2} & \omega <= 2\omega_0 + 2h \\ 0 & \omega > 2\omega_0 + 2h \end{cases}$$

Постоянная составляющая (СИГНАЛ) и переменная составляющая (ШУМ) на выходе квадратичного детектора

$$\overline{y}^2 : \sigma_{yL}^2 : \sigma_{yH}^2 = 1 : 1 : 1$$

Отбросим высокочастотную составляющую

(около частоты $2\omega_0$)

$$\overline{y}^2 : \sigma_{yL}^2$$

$$\overline{y}^2 = \sigma_{yL}^2 = \sigma_x^4$$

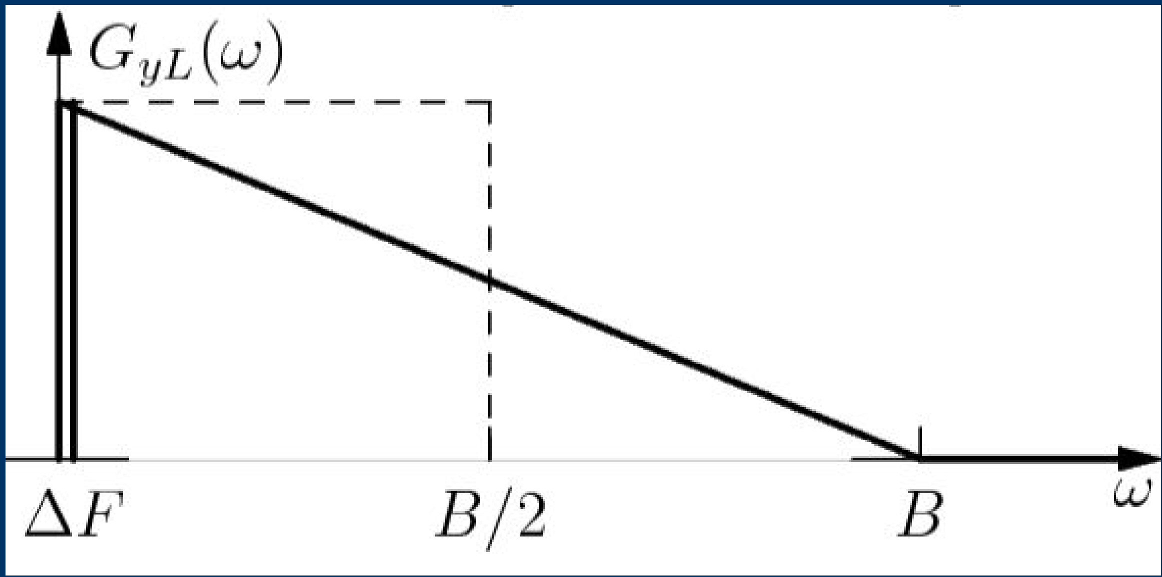
$$\boxed{\overline{y} = \sigma_{yL} = \sigma_x^2 = kTB}$$

Основной закон баланса энергий на выходе квадратичного детектора, когда на входе – ограниченный по частоте белый шум

$$\overline{y}^2 : \sigma_{yL}^2 : \sigma_{yH}^2 = 1 : 1 : 1$$

С.А.Ахманов, Ю.Е.Дьяков, А,С,Чиркин. Введение в статистическую радиофизику и оптику. Москва, "Наука", 1981. с.364.

НЧ фильтрация: эквивалентная прямоугольная энергетическая полоса равна B/2



$$\sigma_y^2 = a\frac{B}{2}$$

$$\sigma_{yf}^2 = a\Delta F$$

$$\sigma_{yf} = \sigma_y\sqrt{\frac{\Delta F}{B/2}} = \sigma_y\frac{1}{q}$$

$$q = \sqrt{\frac{B/2}{\Delta F}}$$

На выходе квадратичного детектора

$$SIGNAL = \overline{y} = \sigma_x^2 = kTB$$

$$NOISE = \sigma_y = \sigma_x^2 = kTB$$

На выходе ФНЧ

$$SIGNAL = \overline{y} = \sigma_x^2 = kTB$$

$$NOISE = \frac{\sigma_y}{q} = kTB\sqrt{\frac{\Delta F}{B/2}} = kTB\sqrt{\frac{2 \cdot \Delta F}{B}}$$

Радиометрический выигрыш

- !!!

$$\Delta T = T\sqrt{\frac{\Delta F}{B/2}} = T\frac{1}{q}$$

$$\Delta T = T\sqrt{\frac{1}{B \cdot t_{LF}}} \qquad \text{где } \sqrt{B \cdot t_{LF}} = q$$

t_{LF} – время интегрирования идеального интегратора

$$q = \sqrt{\frac{B/2}{\Delta F}} \qquad \text{радиометрический выигрыш}$$

- ???

$$\Delta T = T\sqrt{2}\sqrt{\frac{\Delta F}{B}} \qquad \text{где } \sqrt{\frac{B}{\Delta F}} = q$$

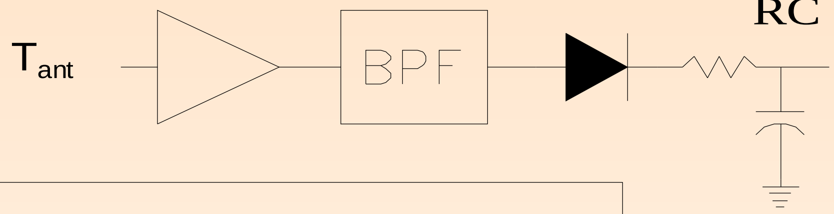
$$q = \sqrt{B\tau} \qquad \text{где } \tau = RC$$

Radio Astronomy Receivers

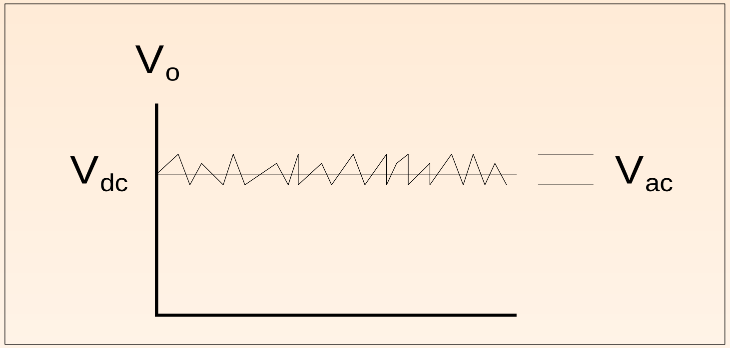
Roger D. Norrod NRAO-Green Bank

Receiver Stability

$$\tau = \frac{1}{RC}$$



$$V_o \propto G\,T_{ant}$$

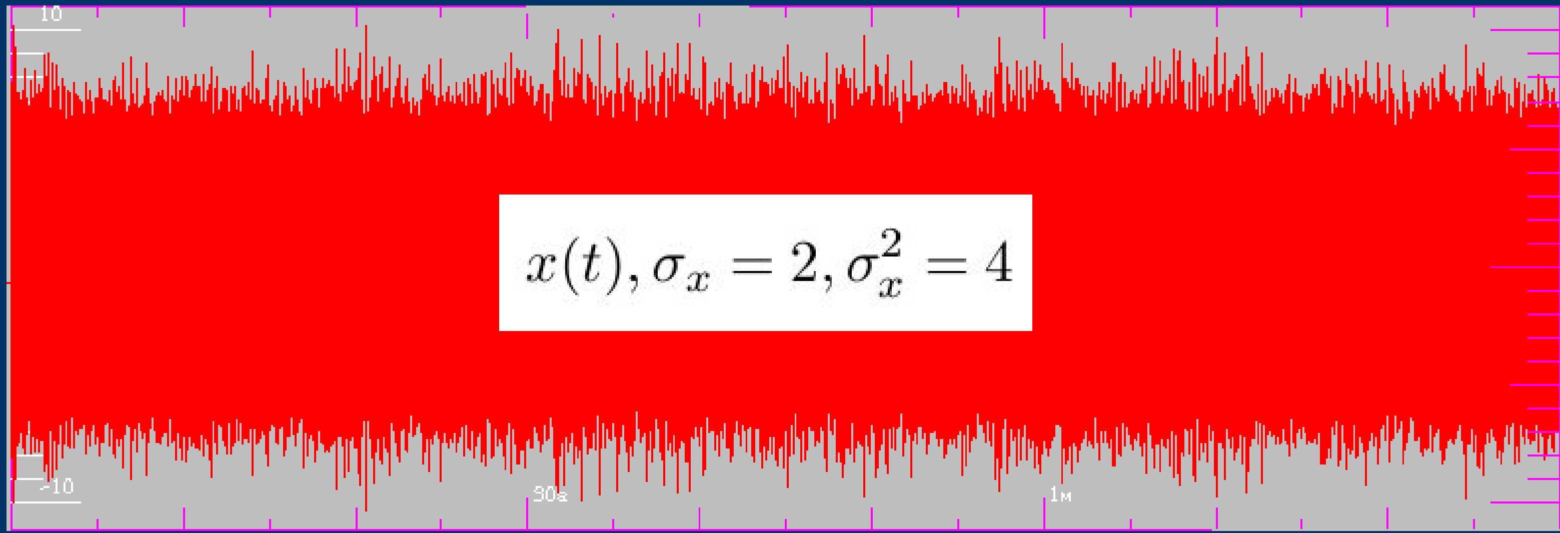


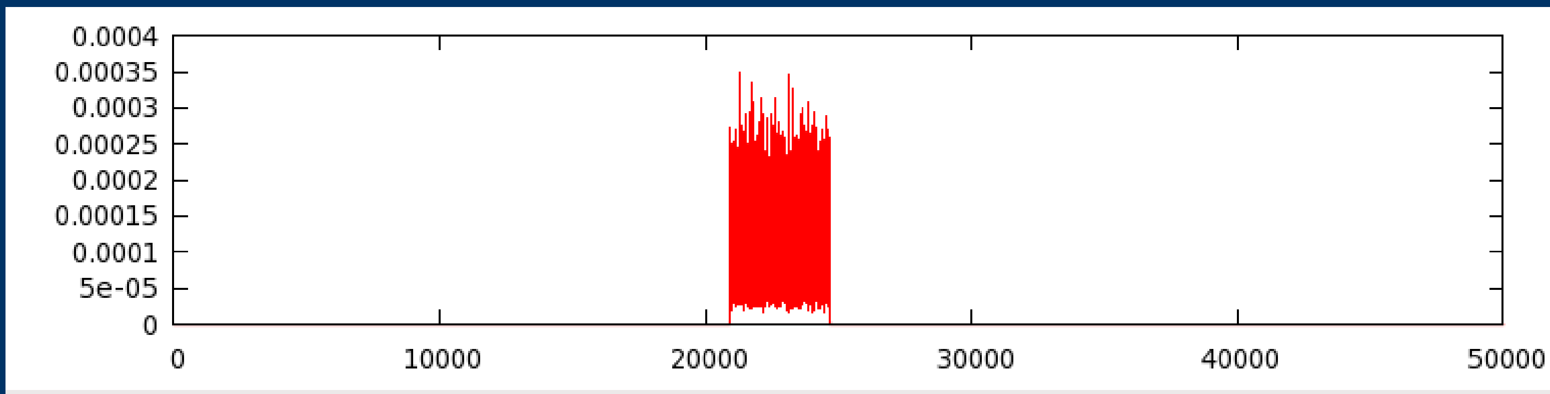
$$\frac{V_{ac,\,rms}}{V_{dc}} = \frac{1}{\sqrt{B\tau}}$$

Example: B = 100 MHz, ☺= 0.1 s, then

$$\frac{V_{ac,\,rms}}{V_{dc}} = 0.03\%$$

Сигнал и его спектр на входе КД



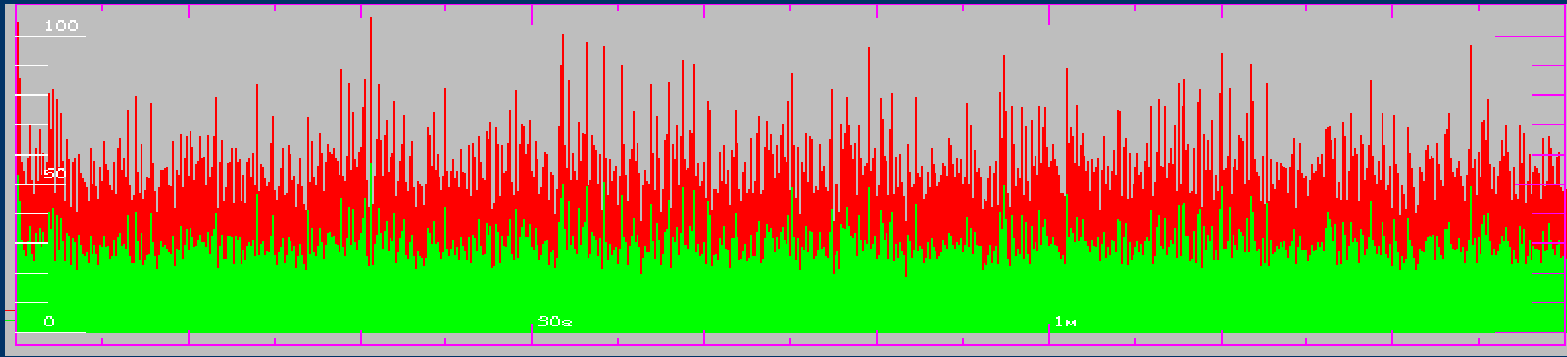


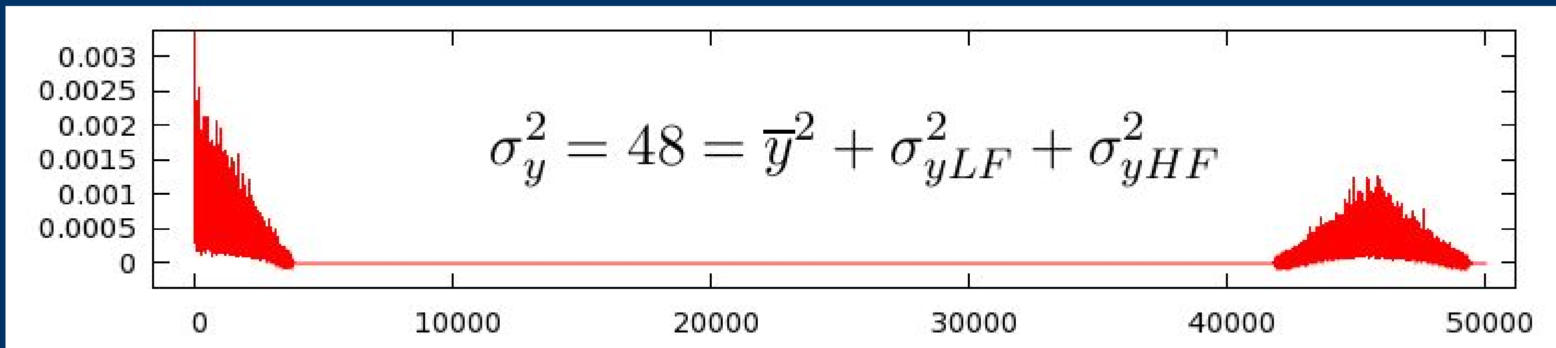
Что будет на выходе КД?

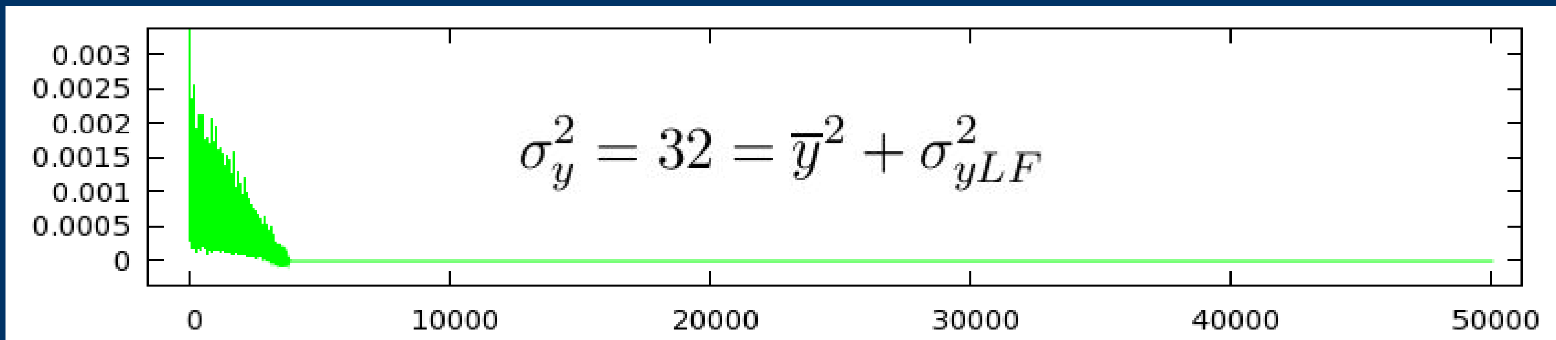
$$y(t) = x^2(t)$$

$$\sigma_y^2 = \overline{y}^2 + \sigma_{yLF}^2 + \sigma_{yHF}^2 = 3 \cdot \sigma_x^4 = 3 \cdot 16 = 48$$

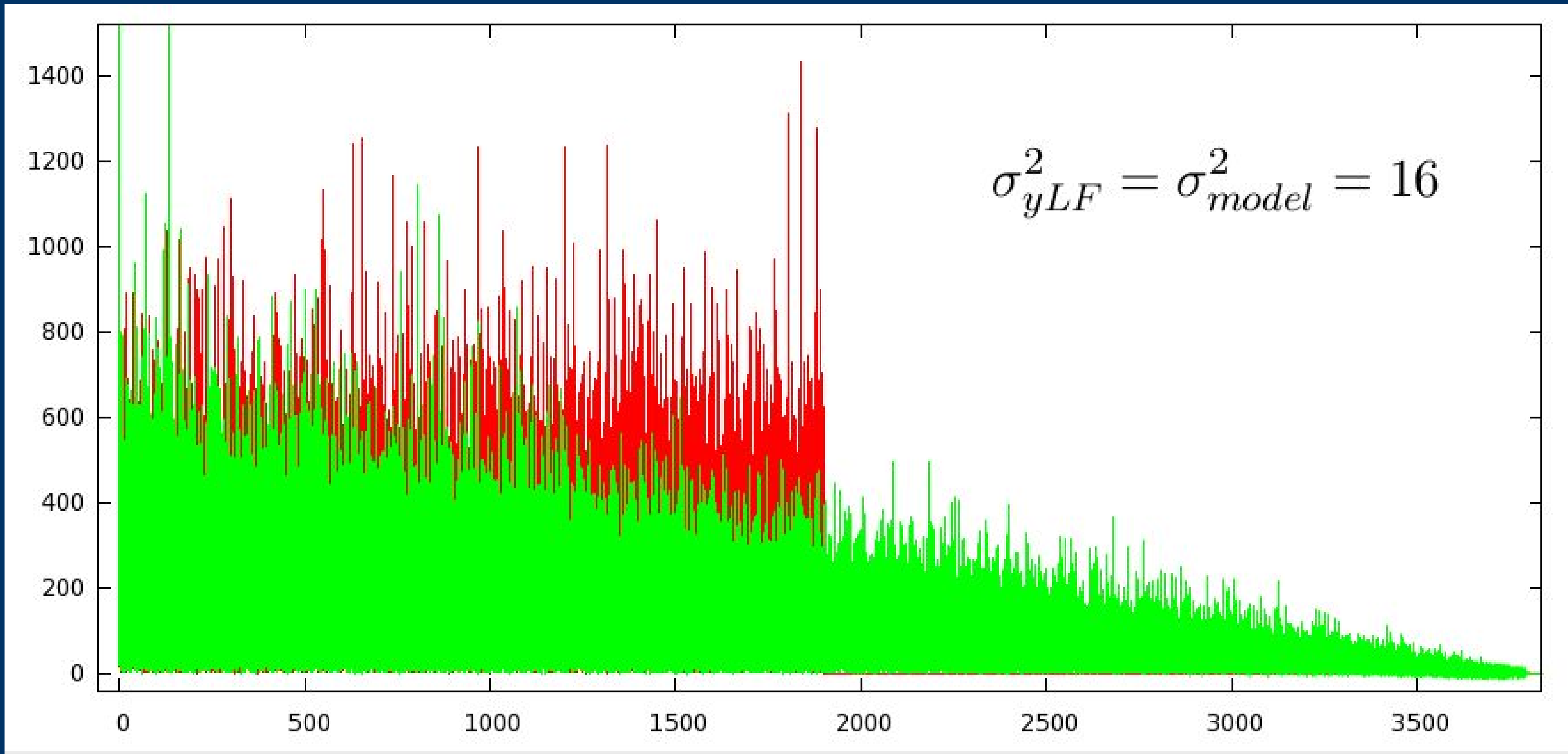
Сигнал и спектр на выходе КД



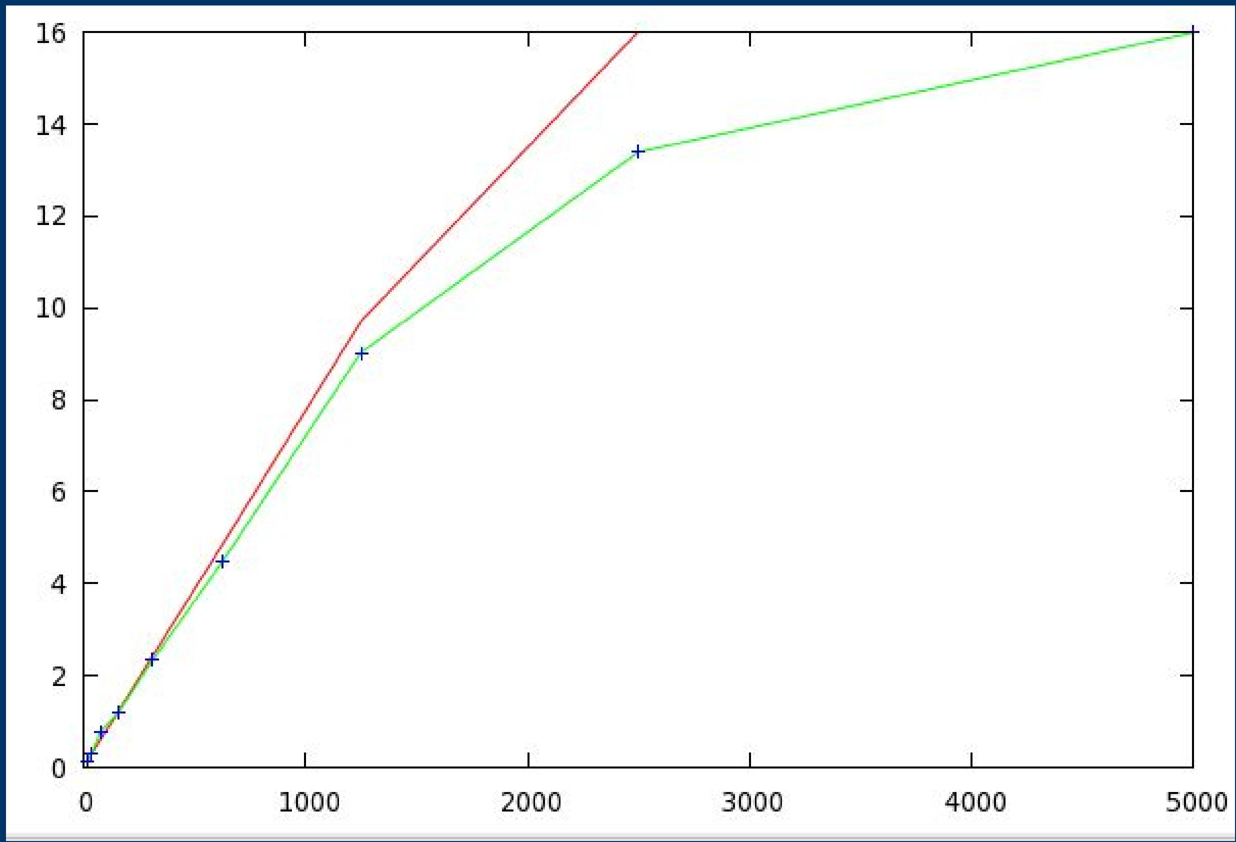




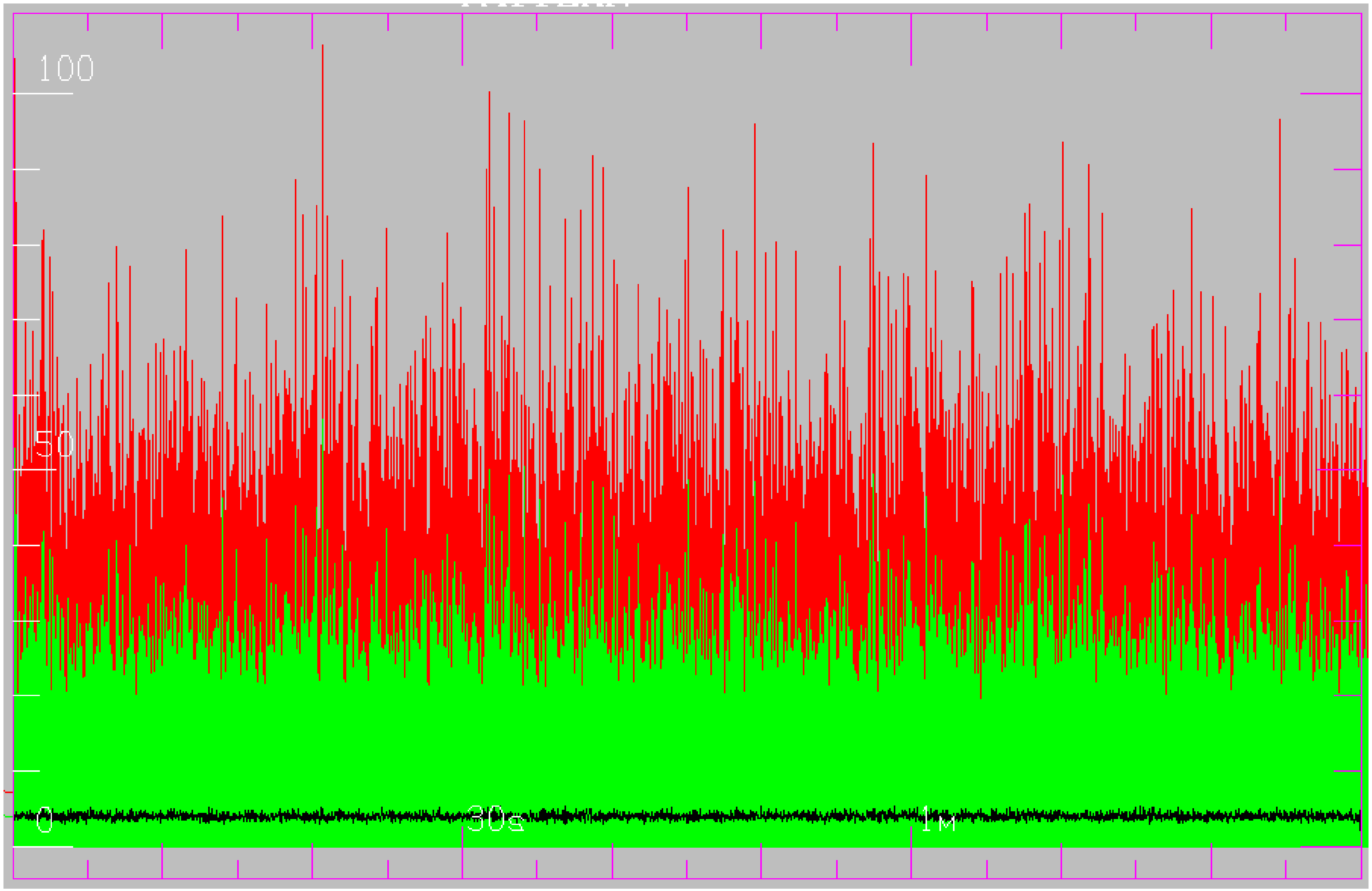
НЧ часть спектра и модель эквивалентной прямоугольной полосы



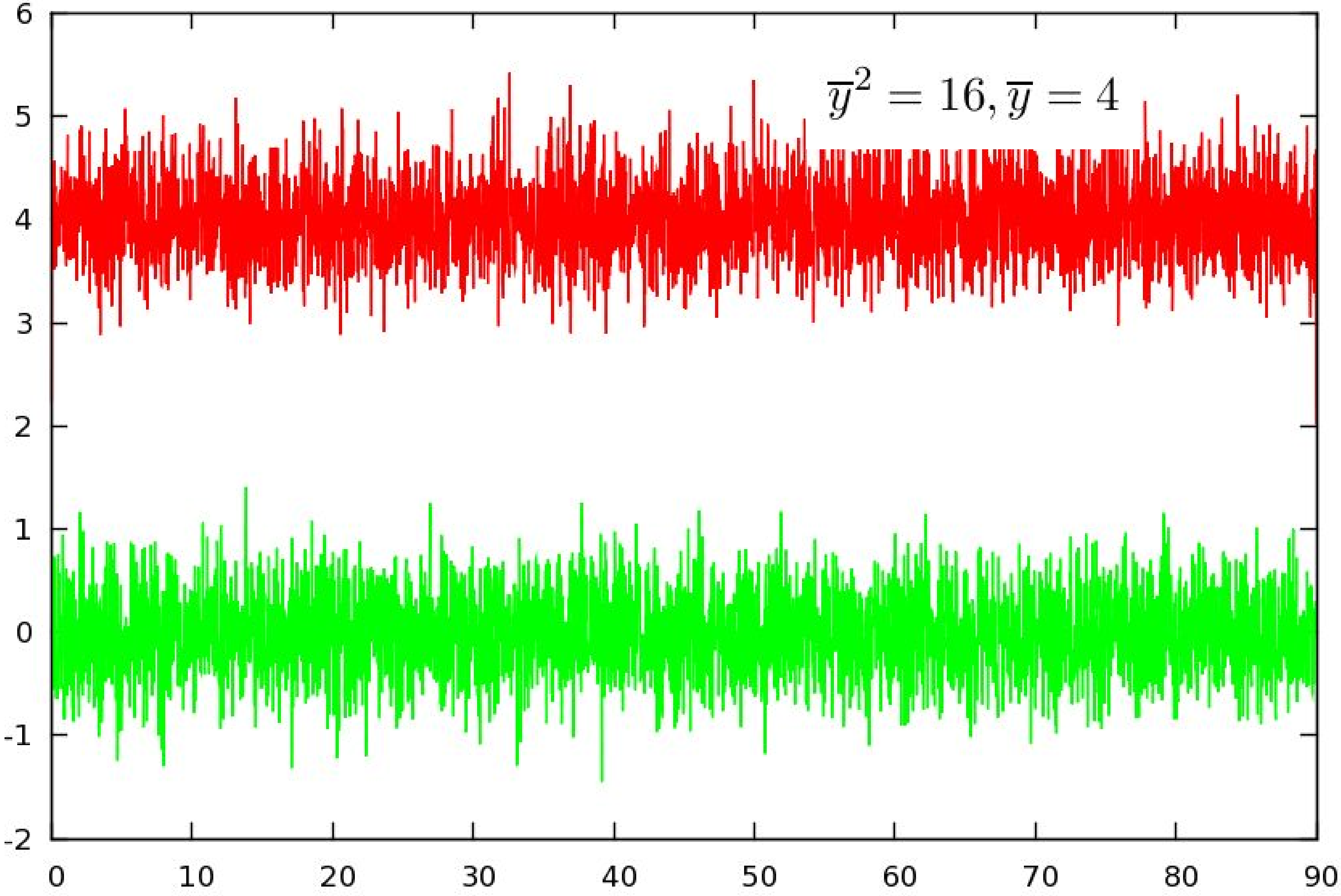
Проверка эквивалентности полос: реальной и эквивалентной прямоугольной



Сигналы на выходе КД: исходный (красный), без ВЧ компоненты шума (зеленый), после ФНЧ (черный)



Сигнал после ФНЧ (красный) и модельный сигнал в эквивалентной прямоугольной энергетической полосе B/2 (зеленый)



Вычисления для оцифровки сигнала радиометра

$$B = 5GHz, \Delta F = 14kHz, q = \sqrt{\frac{B/2}{\Delta F}} \approx 422.6$$

$$\overline{y} = 1mV, \Rrightarrow \sigma_y = 1mV(RMS)$$

$$\Longrightarrow \sigma_{yf} = \frac{1mV}{422.6} \approx 2.4\mu V(RMS)$$

$$\Longrightarrow \tilde{y}_{LF}(p-p) \approx 2.4 * 5 \approx 11.8\mu V$$

$$ADC16, 0-1V, LSB \approx 15.3\mu V$$

$$\Longrightarrow G_{LF} = 10 \Longrightarrow G \cdot \tilde{y}_{yf} = 118\mu V$$

$$\overline{y} \cdot G_{LF} = 10mV$$

$$\tilde{y}_{LF} \cdot G_{LF} \approx 118\mu V \approx 7.7LSB$$

Заключение

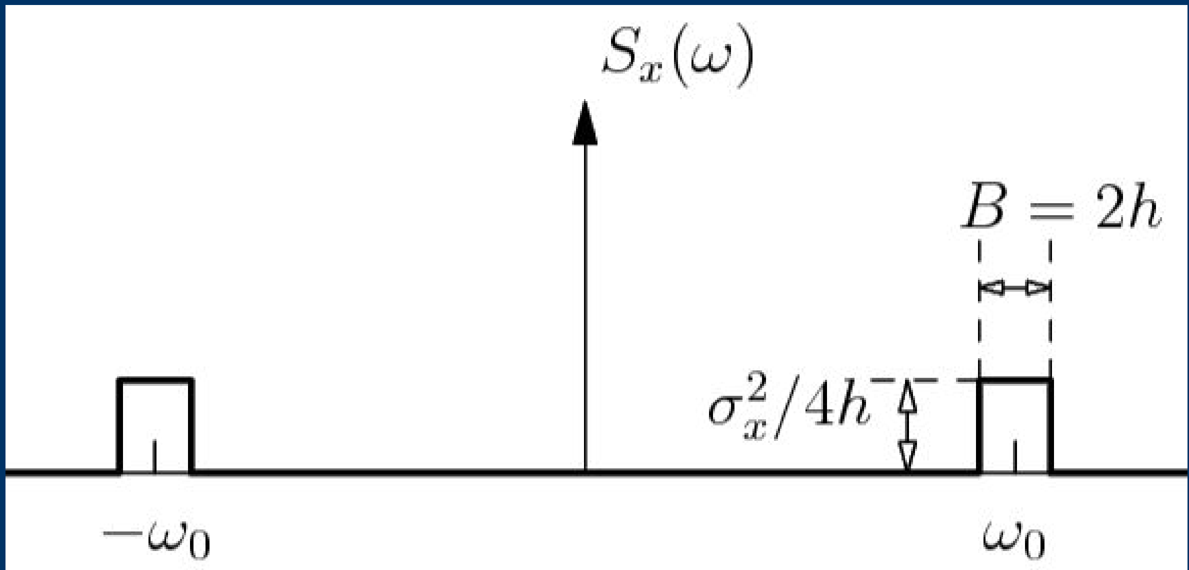
- Точное применение радиометрического выигрыша, плюс – закона баланса энергий на выходе квадратичного детектора – позволяют производить точный расчет требуемых ВЧ и НЧ усилений, ФНЧ и системы регистрации данных.

Приложения

Измерение средней мощности в СВЧ полосе частот радиометра

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F_x(\omega)|^2 d\omega.$$

Модель СВЧ сигнала радиометра:
“Ограниченный по частоте белый шум” с гауссовой плотностью вероятности, среднее равно нулю



Измеряемая величина и способ измерения

Измеряемая величина - **истинный средний квадрат ограниченного по частоте белого шума с гауссовой плотностью вероятности, равный полной мощности в полосе частот**

$$\sigma_x^2 = \psi_x^2 = E[x^2(t)] = kBT_n$$

Способ измерения – **оценка дисперсии процесса за время интегрирования**

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\psi}_x^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

На выходе квадратичного детектора (β=1)

$$y(t) = \beta x^2(t),$$

$$p(y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{y}{2\sigma_x^2}}}{\sqrt{y}}$$

$$\psi_y^2 = E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p(y)dy = 3\sigma_x^2.$$

Средний квадрат

$$\mu_y = E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y)dy = \sigma_x^2.$$

Среднее значение (Сигнал)

$$\sigma_y^2 = E[(y-\mu_y)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu_y)^2 p(y)dy = 2\sigma_x^2.$$

Дисперсия (Шум)

На выходе квадратичного детектора (β=1, в частотной области)

$$R_x(\tau) = \frac{\psi_x(\tau)}{\psi_x(0)} = \frac{sin(h\tau)}{h\tau} cos(\omega_0 \tau).$$

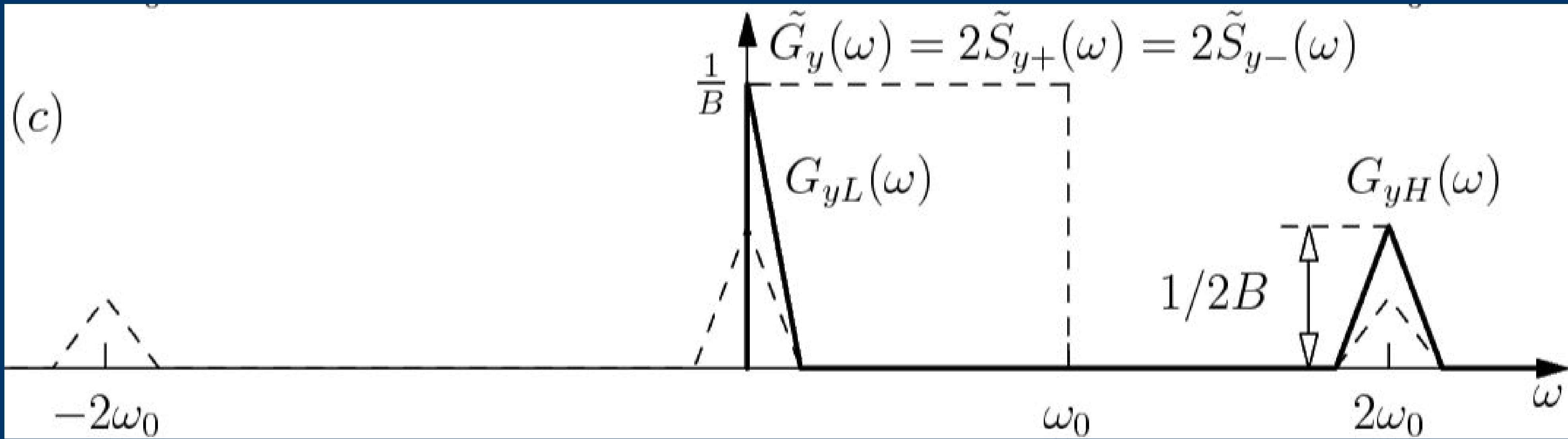
$$\psi_y(\tau) = \sigma_x^4 [1 + 2R_x^2(\tau)]$$

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_y(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau,$$

$$S_y(\omega) = \sigma_x^4 [\delta(\omega) + 2\tilde{S}_y(\omega)]$$

$$\tilde{S}_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x^2(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau.$$

Односторонняя СПМ на выходе КД



$$S_y(\omega) = \sigma_x^4[\delta(\omega) + 2\tilde{S}_y(\omega)]$$

$$G_y(\omega) = \sigma_x^4[\delta(\omega) + 2(G_{yL}(\omega) + G_{yH}(\omega))]$$

Сигнал и шум на выходе КД

$$G_y(\omega) = \sigma_x^4[\delta(\omega) + 2(G_{yL}(\omega) + G_{yH}(\omega))]$$

$$\sigma_y^2 = \int_0^\infty G_y(\omega)d\omega = 3\sigma_x^4$$

Средний квадрат

$$\mu_y^2 = \sigma_x^4$$

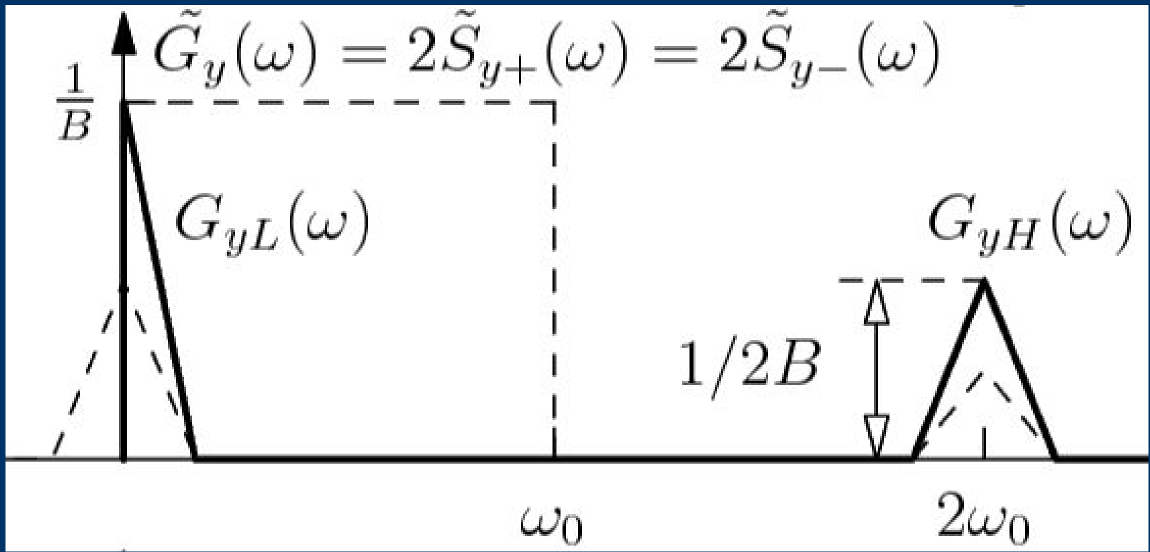
Квадрат среднего значения (Сигнала)

$$\sigma_y^2 = \sigma_{yL}^2 + \sigma_{yH}^2 = 2\sigma_x^4$$

Дисперсия (Шум)

$$\sigma_{yL}^2 = \sigma_{yH}^2 = \mu_y^2 = \sigma_x^4$$

Отбросим высокочастотную составляющую шумов: тогда на выходе КД отношение СИГНАЛ/ШУМ равно единице



$$\mu_y^2 : \sigma_{yL}^2 = 1 : 1$$