Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К
СПЕЦИАЛЬНАЯ АСТРОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ

П Р Е П Р И Н Т N 198

Д.А.Павлов, А.А.Кочкаров, А.А.Узденов

ОБ ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫДЕЛЕНИЯ НАИБОЛЬШИХ МАКСИМАЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ НА ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФАХ

Нижний Архыз
2004

УДК 519.1

ОБ ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫДЕЛЕНИЯ НАИБОЛЬШИХ МАКСИМАЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ НА ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФАХ

Д.А.Павлов, А.А.Кочкаров, А.А.Узденов

Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия,
г. Черкесск, Карачаево-Черкесия, Россия, 369000

Аннотация. Статья посвящена многокритериальной задаче покрытия предфрактальных графов пересекающимися простыми цепями. Представлен алгоритм, выделяющий покрытие, состоящее из наибольших максимальных цепей на предфрактальном (n, L)-графе, причем это покрытие является оптимальным по критерию $F_2(x)$ и оценивается по остальным критериям. Все алгоритмы являются полиномиальными.
Ключевые слова: предфрактальный (n, L)-граф, подграф-затравка, остовный подграф, наибольшая максимальная цепь.

ABOUT ONE MULTICRITERIA PROBLEM OF SELECTION OF THE GREATEST MAXIMUM PATHS ON PREFRACTALS GRAPHS

D.A Pavlov., A.A.Kochkarov, A.A.Uzdenov

Abstract. The paper is devoted to the multicriteria problem of a covering prefractals graphs by intersected simple paths. An algorithm selecting a covering consisting from the greatest maximum chains by prefractal (n, L)-graph is represented, and this covering is optimum by criterion $F_2(x)$ and estimated by remaining criteria. All the algorithms are polynomial.
Keywords: prefractal (n, L)-graph, subgraph - seeding agent, spanning subgraph, greatest maximum path.

1. Введение. Основные определения

Оговоримся заранее, что недостающие определения и понятия теории графов и предфрактальных графов можно найти в работах Емеличева и др. (1990), Кочкарова (1998).

Введем понятие предфрактального графа. Пусть $H=(W,Q)$ - n – вершинный связный граф с множеством вершин W, $|W|=n$ и множеством ребер $|Q|=q$. Условимся называть его «затравкой». В качестве обобщения известной операции «расщепления вершины графа» (Емеличев и др., 1990) определим операцию «замещения вершины затравкой» (ЗВЗ). Для произвольного графа $G=(V,E)$ ее суть состоит в замещении вершины $v \in V$ графа n-вершинной затравкой $H=(W,Q)$. При этом каждое ребро $(v,v') \in E$, $v' \in V$, инцидентное вершине v, удаляется и заменяется на $(u,v') \in E$, где $u \in W$ – вершина затравки, выбираемая либо произвольно, либо по определенному закону (Кочкаров, 1998). Определим поэтапный процесс выполнения операции ЗВЗ. На этапе $l=1$ в данной затравке $H=(W,Q)$ нумеруем вершины и ребра – получаем граф, обозначаемый через $G_1=(V_1,E_1)$, т.е. $G_1=(V_1,E_1)=H=(W,Q)$. Пусть выполнены этапы $l=1,2,...,L$ и по завершении этапа L получен граф $G_L=(V_L,E_L)$ из $G_{L-1}=(V_{L-1},E_{L-1})$ заменой каждой его вершины затравкой $H=(W,Q)$. Полученный граф будем называть предфрактальным (n,L)-графом, где $|W|=n$. Процесс порождения предфрактального графа G_L, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов $G_1,G_2,...,G_l,...,G_L$, называемой *траекторией*.

Для предфрактального графа G_L ребра, появившиеся на l-ом, $l \in \{1,2,...,L\}$ этапе порождения, будем называть *ребрами ранга* l. *Новыми* ребрами предфрактального графа G_L назовем ребра ранга L, а все остальные ребра назовем *старыми*.

Если из предфрактального графа G_L, порожденного n-вершинной затравкой H, последовательно удалить все старые ребра (ребра ранга l, $l=1,2,...,L-1$), то исходный граф распадется на множество связных компонент $B^{(1)}_{l,s}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$, изоморфных (Емеличев и др., 1990) затравке H. Множество компонент $\{B^{(1)}_L\}$ будем называть *блоками первого ранга*. Аналогично, при удалении из предфрактального графа G_L всех старых ребер рангов $l=1,2,...,L-2$, получим множество *блоков* $\{B^{(2)}_L\}$ *второго ранга*. Обобщая, скажем, что при удалении из предфрактального графа G_L всех ребер рангов $l=1,2,...,L-r$ получим множество $\{B_{L,i}^{(r)}\}$, $r \in \{1,2,...,L-1\}$, *блок* r*-го ранга*, где $i = 1,2,...,n^{L-r}$ – порядковый номер блока. Блоки $B_L^{(1)} \subseteq G_L$ первого ранга также будем называть *подграф-затравками* H предфрактального графа G_L.Очевидно, что всякий блок $B_L^{(r)} = (U_L^{(r)}, M_L^{(r)})$, $r \in \{1,2,...,L-1\}$ является предфрактальным графом $B_r = (U_r, M_r)$, порожденным затравкой H.

Термином *подграф-затравка* $z_s^{(l)}$ будем называть блок $B_{l,s}^{(1)}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ первого ранга предфрактального графа G_l, $l = \overline{1, L}$ из траектории. Последовательное выделение подграф-затравок $z_s^{(l)}$ на графах $G_1, G_2, ..., G_L$ из траектории предфрактального графа G_L разбивает множество ребер E_L на непересекающиеся подмножества подграф-затравок $Z(G_L) = \{z_s^{(l)}\}$, где $l = \overline{1, L}$, – ранг подграф-затравки, а $s = \overline{1, n^{l-1}}$ – ее порядковый номер.

Будем говорить, что *предфрактальный граф* $G_L = (V_L, E_L)$ *взвешен*, если каждому его ребру $e^{(l)} \in E_L$ приписано действительное число $w(e^{(l)}) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$, где $l = \overline{1, L}$ – ранг ребра, $a > 0$, и $\theta < \frac{a}{b}$.

2. Многокритериальная постановка задачи о покрытии предфрактального графа простыми пересекающимися цепями

Рассмотрим взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, у которой $|W| = n$, $|Q| = q$.

Покрытием вида $\aleph$ графа G_L будем называть подграф $x = (V_L, E_x)$, $E_x \subseteq E_L$, состоящий из множества таких простых цепей $\{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_K\}$, что между двумя произвольными вершинами из покрытия также существует простая цепь. Множество всех покрытий x обозначим через X. Очевидно, что покрытие $x = (V_L, E_x)$ является связным подграфом графа G_L и образуется простыми цепями, пересекающимися либо по вершинам, либо по ребрам. Поэтому кратчайшую цепь, имея в виду цепь с наименьшим суммарным весом ее ребер, из графа будем называть *максимальной (максимальной по включении)*, если она не является собственной подцепью какой-либо другой кратчайшей цепи (Павлов, 2004). Вообще говоря, наличие в покрытии $\aleph$ немаксимальных цепей не противоречит определению покрытия.

Простую цепь предфрактального графа G_L будем называть i*-смешанной цепью* и обозначим через C^i, если она состоит из ребер i различных рангов.

На множестве $x \in X$ покрытий графа $G_L = (V_L, E_L)$ определены векторно-целевые функции (ВЦФ):

$$\mathrm{F}(X) = \{F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x), F_5(x)), x \in X\} \qquad (1)$$

$$F_1(x) = \sum_{e \in E_x} w(e) \to \min, \qquad (2)$$

где $\sum_{e \in E_x} w(e)$ – общий (суммарный) вес покрытия x;

$$F_2(x) = \min_{k=\overline{1,K}} w(C_k) \to \max, \qquad (3)$$

где C_k – максимальна цепь, $k = \overline{1,K}$, из покрытия $x \in \{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_K\}$, а $w(C_k)$ – ее длина (суммарный вес ребер цепи).

$$F_3(x) = N(x) \to \min, \qquad (4)$$

где $N(x)$ – число всех максимальных цепей в покрытии x;

$$F_4(x) = i \to \min, \qquad (5)$$

для всякой смешанной цепи C^i из покрытия x.

$$F_5(x) = \left| \rho_x(u,v) - \rho_{G_L}(u,v) \right| \to \min, \qquad (6)$$

где для любых вершин $u, v \in V_L$ графа $\rho_x(u,v)$ – расстояние в покрытии x, а $\rho_{G_L}(u,v)$ – расстояние на графе G_L;

Напомним, что $\rho_{G_L}(u,v)$ – длина кратчайшей цепи $\{u,v\}$, а потому $\rho_{G_L}(u,v)$ – минимальна по сравнению с длинами цепей, соединяющих вершины $u, v \in V_L$ графа G_L на $\{x\}$.

Всевозможные покрытия $\{x\}$ предфрактального графа G_L образуют множество допустимых решений $X = X(G_L) = \{x\}$ (МДР) для ВЦФ (1) – (6).

3. Алгоритм β

В настоящем параграфе предлагается алгоритм β, строящий покрытие предфрактального графа, оптимальное по другому критерию – $F_2(x)$.

Как и ранее, рассмотрим предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$. Алгоритм β выделяет на предфрактальном графе покрытие $x_2 = J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_K\} \in X$, у которого все цепи $C_k = \{v_k, u_k\}$ простые, $k = \overline{1, K}$.

В основе алгоритма β лежит алгоритм выделения наибольших максимальных цепей (алгоритм ВНМЦ) на произвольном графе. Алгоритм β, используя алгоритм ВНМЦ в качестве процедуры, на каждой подграф-затравке множества $Z(G_L) \in z_s^{(l)}, l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ предфрактального графа G_L выделяет подграф $J_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{J_s^{(l)}}) = \{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{K_{J_s^{(l)}}}\}$ такой, что все цепи $C_k = \{u, v\}$ являются максимальными (т.е. $|C_k| = \min$), $k = \overline{1, K_J}$ среди всех цепей между вершинами $u, v \in V_s^{(l)}$ подграф-затравки $z_s^{(l)}$ и наибольшими. Множество покрытий $\{J_s^{(l)}\}, l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, выделенных на подграф-затравках предфрактального графа G_L, образует покрытие $x_2 = J = (V_L, E_J)$.

АЛГОРИТМ ВНМЦ

Вход: граф $G = (V, E)$.

Выход: остовный подграф $J = (V, E_J) = \{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{K_J}\}$.

Шаг 1. Найти множество $\{C'_{i_1}, C'_{i_2}, ..., C'_{i_k}, ..., C'_{i_{K'}}\}$ всех кратчайших цепей между каждой парой вершин $u, v \in V$ графа G. Из множества $\{C'_{i_1}, C'_{i_2}, ..., C'_{i_k}, ..., C'_{i_{K'}}\}$ удалить все те цепи, которые полностью содержатся в других. Оставшиеся объединить в множество $\{C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_k}, ..., C_{i_{K^*}}\}$, присвоив им такие индексы, что длина i_{k+1}-ой цепи не больше длины i_k-ой цепи, $k = \overline{1, K^*}$. Цепи $\{u, v\}$ и $\{v, u\}$ для любой пары вершин $u, v \in V$ считать идентичными и включать в множество $\{C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_k}, ..., C_{i_{K^*}}\}$ только одну из них. Множество $\{C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_k}, ..., C_{i_{K^*}}\}$ – есть множество максимальных цепей графа G, где C_{i_1} – диаметральная (Емеличев и др., 1990) .

Шаг 2. Цепями из множества $\{C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_k}, ..., C_{i_{K^*}}\}$ последовательно, начиная с i_1-ой, накрывать вершины и ребра графа G. Говоря о накрытии графа G цепью C_{i_k}, будем иметь в виду выделение на графе G вершин и ребер, образующих цепь C_{i_k}. Для накрытия использовать только цепи, удовлетворяющие условию – каждая новая цепь выделяет хотя бы еще одну, не накрытую предыдущими цепями вершину графа G.

Шаг 3. Всем цепям из множества $\{C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_k}, ..., C_{i_{K^*}}\}$, использованным для накрытия вершин и ребер графа G присваивать номера в порядке их использования: $C_1, C_2, ..., C_k, ...$. Накрывать граф G до тех, пока не останется невыделенных вершин.

Шаг 4. Множество цепей $\{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{K_J}\} \subseteq \subseteq \{C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_k}, ..., C_{i_{K^*}}\}$, использованных для накрытия графа G, образуют искомое покрытие $J = (V, E_J) = \{C_1, C_2, ..., C_{K_J}\}$, состоящее из наибольших максимальных цепей $C_k = \{v_k, u_k\}$ $k = \overline{1, K_J}$.

Теорема 1. *Алгоритм ВНМЦ выделяет на графе* $G = (V, E)$ *покрытие* $J = (V, E_J) = \{C_1, C_2, ..., C_{K_J}\}$, *состоящее из наибольших максимальных цепей* C_k, $k = \overline{1, K_J}$.

Доказательство. На первом шаге алгоритма ВНМЦ для дальнейшего использования выделяются все кратчайшие цепи между вершинами графа $G = (V, E)$. Попарно не включающие друг друга полностью цепи образуют множество $\{C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_k}, ..., C_{i_{K^*}}\}$. Очевидно, если накрыть граф G всеми цепями из множества $\{C_{i_k}\}$, $k = \overline{1, K^*}$, будут выделены все вершины и ребра графа G, т.е. сам граф G. Поэтому необходимо найти путь, следуя которому для накрытия всех вершин графа G будут использованы не все цепи из множества $\{C_{i_k}\}$, $k = \overline{1, K^*}$. Это позволит решить поставленную задачу – выделение покрытия $J = (V, E_J) = \{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{K_J}\}$ – значительно “быстрее”, т.е. использовать меньшее количество цепей в покрытии.

Так, на втором шаге граф G, начиная с диаметральной цепи C_{i_1}, накрывается цепями из множества $\{C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_k}, ..., C_{i_{K^*}}\}$ поочередно, в порядке невозрастания их длин. Для того, чтобы алгоритм, как требуется, работал “быстрее”, граф накрывается только теми цепями, которые накрывают хотя бы еще одну, не выделенную ранее вершину графа G.

В самом деле, каждая цепь $C_k = \{v_k, u_k\}, k = \overline{1, K_J}$ – максимальная, поскольку является кратчайшей среди всех возможных цепей между вершинами $v_k, u_k \in V$ графа G и не содержится ни в какой другой кратчайшей цепи. Кроме того, все максимальные цепи, используемые для накрытия графа G, применяются в порядке уменьшения их длин, начиная с диаметральной.

Пронумеровав по порядку на третьем шаге все использованные цепи, получим множество цепей $\{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{K_J}\} \subseteq \{C_{i_1}, C_{i_2}, ..., C_{i_k}, ..., C_{i_{K^*}}\}$, которое и определяет покрытие $J = (V, E_J)$.

Поскольку покрытие $J = (V, E_J)$ состоит из наибольших максимальных цепей графа G, то оно связно.

В наихудшем случае, когда в алгоритме ВНМЦ с каждой использованной для накрытия цепью будет выделятся только одна новая вершина, число цепей в покрытии J будет равно $K_J = |V| - |C_1| + 1$, где $|C_1| + 1$ – число вершин в диаметральной цепи графа G.

Теорема 2. *Вычислительная сложность алгоритма ВНМЦ, выделяющего покрытие* $J = (V, E_J)$ *на графе* $G = (V, E)$, $|V| = n$, *равна* $O(n^5)$.

Доказательство. Поиск кратчайшего расстояния между двумя любыми вершинами графа G займет не более чем n^2 простейших операций (Гэри, Джонсон, 1982). Алгоритм ВНМЦ на своем первом шаге выделяет все кратчайшие цепи графа G, а их количество равно $\frac{n(n-1)}{2} < n^2$. Далее алгоритм выбирает сравнением некоторую часть этих цепей. Поскольку все вершины и ребра, образующие цепи, известны, сравнение цепей займет еще n^2 операций. В итоге вычислительная сложность алгоритма ВНМЦ равна $O(n^2 n^2 + n^2) < O(n^5)$.

АЛГОРИТМ β

Вход: предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$.

Выход: связный остовный подграф $J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_K\}$.

Шаг 1. Построить множество подграф-затравок $Z(G_L)=\{z_s^{(l)}\}$, $l=\overline{1,L}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$ для предфрактального графа G_L. В соответствии с построенным множеством $Z(G_L)$ пронумеровать все ребра предфрактального графа G_L.

Шаг 2. Поочередно, в порядке уменьшения ранга $l=L,L-1,...,2,1$ на всех подграф-затравках $z_s^{(l)}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$ из множества $Z(G_L)$, используя алгоритм ВНМЦ, выделять остовные подграфы $J_s^{(l)}=(V_s^{(l)},E_{J_s^{(l)}})=$ $=\{C_1,C_2,...,C_{K_{J_s^{(l)}}}\}$. После нахождения $\{J_s^{(L)}=(V_s^{(L)},E_{J_s^{(L)}})\}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$ создать множество цепей $\{C_1^*\}=\{C_{1,1},C_{1,2},...,C_{1,k},...,C_{1,K_1}\}=\{J_s^{(L)}=(V_s^{(L)},E_{J_s^{(L)}})\}$.

Далее, каждый раз после создания множества цепей $\{C_{L-l+1}^*\}=$ $=\{C_{L-l+1,1},C_{L-l+1,2},...,C_{L-l+1,k},...,C_{L-l+1,K_{L-l+1}}\}$, $l=L,L-1,...,2,1$, каждую его цепь $C_{L-l+1,k}$ соединять с ребрами цепей подграф-затравок $\{z_s^{(l-1)}\}$ и объединять их в новое множество цепей $\{C_{L-l+2}^*\}$ следующим образом.

Шаг 3. Всякое ребро $e\in C_k=\{v_k,u_k\}$, $k=\overline{1,K_{J_s^{(l)}}}$ цепи $C_k\in J_s^{(l-1)}$ подграф-затравки $z_s^{(l-1)}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$ присоединять к той цепи из множества $\{C_{L-l+1}^*\}$, концу которой она инцидентна. Образованную таким образом цепь внести в новое множество цепей $\{C_{L-l+2}^*\}$.

Если ребро e инцидентно одним своим концом нескольким цепям из $\{C_{L-l+1}^*\}$, то в множество $\{C_{L-l+2}^*\}$ вносятся все образующиеся при этом цепи.

Если обе вершины v_k,u_k ребра e инцидентны концам двух различных цепей C_{L-l+1,k_1} и C_{L-l+1,k_2} соответственно, тогда в множество $\{C_{L-l+2}^*\}$ вносить цепь, образованную цепями C_{L-l+1,k_1}, C_{L-l+1,k_2} и ребром e, только в том случае, когда концы цепей C_{L-l+1,k_1} и C_{L-l+1,k_2}, неинцидентные ребру e, также не инцидентны концам других цепей из $\{C_{L-l+1}^*\}$. В противном случае, в множество $\{C_{L-l+2}^*\}$ вносить цепи, образованные несколькими цепями из $\{C_{L-l+1}^*\}$ и несколькими ребрами цепей подграф-затравок $(l-1)$-го ранга.

Если ребро e не инцидентно никаким цепям из $\{C^*_{L-l+1}\}$, то внести его в множество $\{C^*_{L-l+2}\}$ в качестве отдельной цепи.

Шаг 4. На выходе предыдущего шага, после того как будут обработаны цепи всех подграф-затравок, получится множество цепей $\{C^*_L\} = \{C_{L,1}, C_{L,2}, ..., C_{L,k}, ..., C_{L,K_L}\}$. Множество цепей $\{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_K\}$, полученное из $\{C^*_L\}$ изменением нумерации, и определяет искомый остовный подграф $J = (V_L, E_J)$.

Теорема 3. *Алгоритм* β *выделяет связный остовный подграф* $J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_K\}$, *где* C_k *– простые цепи, на предфрактальном графе* $G_L = (V_L, E_L)$, *порожденном затравкой* $H = (W, Q)$, $|W| = n$.

Доказательство проведем конструктивно. Первое (о связности суграфа (Емеличев и др., 1990), построенном алгоритмом). Рассмотрим множество подграф-затравок $\{B^{(1)}_L\}$ первого ранга предфрактального графа G_L. Предфрактальный граф G_L можно представить в виде объединенных старыми ребрами подграф-затравок $\{B^{(1)}_L\}$. Каждое старое ребро l-го ранга, как известно, состоит в одной из подграф-затравок $\{z^{(l)}_s\}$, $l = \overline{1, L-1}$. Тогда можно сказать, что блоки $\{B^{(1)}_L\}$ первого ранга ребрами подграф-затравок $\{z^{(L-1)}_s\}$ объединяются в блоки $\{B^{(2)}_L\}$ второго ранга, они, в свою очередь, объединяются ребрами подграф-затравок $\{z^{(L-2)}_s\}$ в блоки $\{B^{(3)}_L\}$ третьего ранга и т.д. И окончательно, блоки $\{B^{(L-1)}_L\}$ ребрами затравки $z^{(1)}_1$ первого ранга соединяются в предфрактальный граф G_L.

Если для объединения n блоков $\{B^{(l)}_L\}$ использовать не все ребра подграф-затравки $z^{(L-l)}_s$ (имея в виду блоки $\{B^{(l)}_L\}$ – образы ее вершин), а ребра некоторого ее связного подграфа, то полученный граф, очевидно, окажется связным подграфом одного из блоков $\{B^{(l+1)}_L\}$. Поскольку это верно для блоков всех рангов $l = \overline{1, L-1}$, выделив суграфы всех подграф-затравок $\{z^{(l)}_s\}$, $l = \overline{1, L}$ предфрактального графа, выделим суграф самого предфрактального графа G_L. Поэтому и в нашем суграфе $J = (V_L, E_J)$ выделяемый алгоритмом β является связным.

Второе (о множестве цепей, построенных алгоритмом). Построение множества различных цепей $J_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{J_s^{(l)}}) = \{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{K_{J_s^{(l)}}}\}$ на всех подграф-затравках $z_s^{(l)} \in Z(G_L)$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, предфрактального графа G_L, а затем и объединения их в множество цепей $J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_K\}$ можно наглядно продемонстрировать на графах $G_1, G_2, ..., G_l, ..., G_L$ из траектории предфрактального графа G_L.

Выделение подграфа $J_1^{(1)} = \{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{K_{J_1^{(1)}}}\}$ на подграф-затравке $z_1^{(1)}$ соответствует применению алгоритма ВНМЦ к графу G_1. Цепи множества $\{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{K_{J_1^{(1)}}}\}$ положим в основу другого множества цепей $\{\overline{C}_1\} = \{\overline{C}_{1,1}, \overline{C}_{1,2}, ..., \overline{C}_{1,k}, ..., \overline{C}_{1,K_1}\}$. После замещения всех вершин графа G_1 затравками H, очевидно, что все цепи $\{\overline{C}_{1,1}, \overline{C}_{1,2}, ..., \overline{C}_{1,k}, ..., \overline{C}_{1,K_1}\}$ будут разорваны вершинами или ребрами этих затравок. Каждая из использованных для замещения затравок H в алгоритме β фигурирует под названием подграф-затравки $z_s^{(2)} \in Z(G_L)$, $s = \overline{1, n}$ второго ранга. Каждое ребро $e \in \overline{C}_{1,k}$ цепи множества $\{\overline{C}_1\}$ может принять одно из нескольких положений относительно выделенных алгоритмом ВНМЦ цепей $\{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{K_{J_s^{(2)}}}\}$ подграф-затравок $\{z_s^{(2)}\}$, $s = \overline{1, n}$. Во-первых, один конец ребра e может быть инцидентен висячей вершине одной или нескольких цепей какой-либо подграф-затравки $z_{s_1}^{(2)}$. Если при этом другие концы рассматриваемых цепей подграф-затравки не инцидентны еще каким-либо ребрам первого ранга, то образуемые ими цепи с ребром e вносятся в новое множество $\{\overline{C}_2\}$. Во-вторых, оба конца ребра e могут быть одновременно инцидентны висячим вершинам цепей двух “соседних” подграф-затравок $z_{s_1}^{(2)}$ и $z_{s_2}^{(2)}$. Если при этом другие концы рассматриваемых цепей подграф-затравок $z_{s_1}^{(2)}$ и $z_{s_2}^{(2)}$ не инцидентны еще каким-либо ребрам первого ранга, то образуемые ими цепи с ребром e поочередно вносятся в множество $\{\overline{C}_2\}$ с последовательными номерами. В-третьих, ребро e может быть не инцидентно никаким цепям из $\{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{K_{J_s^{(2)}}}\}$, тогда ребро e вносится в множество $\{\overline{C}_2\}$ в качестве отдельной цепи. Если же ребро e не подпадает ни под один из описанных случаев, то получаемые цепи при соединении ребер первого ранга с цепями из $\{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{K_{J_s^{(2)}}}\}$ надо наращивать до тех пор, пока это возможно, а только затем вносить их в множество $\{\overline{C}_2\}$. Цепи из $\{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{K_{J_s^{(2)}}}\}$, концам которых не инцидентны никакие ребра первого ранга, также войдут в множество $\{\overline{C}_2\}$ без изменений. В итоге, цепи $\{\overline{C}_2\}$ образуют покрытие для предфрактального графа G_2 из траектории.

Заместив вершины графа G_2 затравками, получим граф G_3, для которого описанным выше способом можно построить покрывающее все его вершины множество цепей $\{\overline{C}_3\}$. Продолжая аналогичным образом, для предфрактального графа G_L построим множество $\{\overline{C}_L\}$, которое, согласно проделанным рассуждениям, совпадает с его подграфом $J = (V_L, E_J)$, выделяемым алгоритмом β.

Теорема 4. *Вычислительная сложность алгоритма* β, *выделяющего покрытие* $J = (V_L, E_J)$ *на предфрактальном графе* $G_L = (V_L, E_L)$, *порожденном затравкой* $H = (W, Q)$, *где* $|W| = n$, $|V_L| = N = n^L$, *равна* $O(Nn^5)$.

Доказательство. Алгоритм β представляет собой, по существу, многократное выполнение шага 2. Шаг 2, в свою очередь, – есть многократное обращение к алгоритму ВНМЦ, вычислительная сложность которого равна $O(n^5)$. Поскольку алгоритм β обращается к процедуре-алгоритму ВКЦ равно $k = \dfrac{n^L - 1}{n - 1}$, то им будет выполнено не более чем $k \cdot O(n^5)$ операций.

Тогда $O(k \cdot n^5) = O(\dfrac{n^L - 1}{n - 1} \cdot n^5) = O(n^L \cdot n^5) = O(Nn^5)$. Отсюда вычислительная сложность алгоритма β равна $O(Nn^5)$.

Примечание 1. Сравнив вычислительные сложности алгоритмов ВНМЦ и β на предфрактальном графе G_L, получим: $O(N^5) < O(Nn^5)$. Поэтому вычислительная сложность алгоритма β меньше вычислительной сложности алгоритма ВНМЦ в n^{L-5} раз.

Теорема 5. *Алгоритм* β *выделяет связный остовный подграф* $J = (V_L, E_J) = \{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_K\}$, *где* C_k *– кратчайшие цепи на предфрактальном* *графе* $G_L = (V_L, E_L)$*, порожденном затравкой* $H = (W, Q)$, $|W| = n$*, смежность старых ребер которого не нарушается.*

Доказательство. Определим операцию "*склеивания*" (Емеличев и др., 1990) двух произвольных графов $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$. Выбираются две вершины для слияния – $v' \in V'$ и $v'' \in V''$. Граф $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, E' \bigcup E'')$, полученный из графов G' и G'' слиянием вершин v' и v'' в некоторую вершину $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$ так, что все ребра, инцидентные вершинам v' и v'', становятся инцидентными вершине $\widetilde{v}$, называется *склеенным* из графов G' и G''.

Предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, таков, что смежность его старых ребер в процессе порождения не нарушалась. Тогда предфрактальный граф G_L можно получить склеиванием всех $\dfrac{n^L - 1}{n - 1}$ подграф-затравок $Z(G_L) = \{z_s^{(l)}\}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$. Сначала подграф-затравка $z_1^{(1)}$ первого ранга склеивается в каждой своей вершине с подграф-затравками $z_s^{(2)}$ второго ранга, $s = \overline{1, n}$. Далее, каждый порожденный таким образом на l-ом, $l = \overline{1, L-1}$ шаге предфрактальный граф G_l склеивается в каждой своей вершине с подграф-затравками $z_s^{(l+1)}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$. В итоге на L-ом шаге получаем предфрактальный граф G_L, смежность старых ребер которого не нарушается.

Если на всех подграф-затравках $\{z_s^{(l)}\}$ предфрактального графа G_L выделить связные остовные подграфы $D_s^{(l)}, l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, то граф D, полученный склеиванием графов $\{D_s^{(l)}\}$, подобно описанному ранее порождению графа G_L, окажется остовным подграфом графа G_L. Это произойдет благодаря взаимному соответствию номеров ребер подграф-затравок $\{z_s^{(l)}\}$, участвовавших в порождении графов D и G_L.

Алгоритм β выделяет на каждой подграф-затравке $z_s^{(l)} \in Z(G_L)$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ остовный подграф $J_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{J_s^{(l)}})$, состоящий их множества простых кратчайших цепей $\{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_{K_{J_s^{(l)}}}\}$. Граф J, полученный склеиванием графов $J_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{J_s^{(l)}})$, очевидно, является связным остовным подграфом $J = (V_L, E_J)$ предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$.

Напомним что, все цепи $\{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_K\}$, образующие покрытия $J = (V_L, E_J)$, являются либо цепями покрытий $J_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{J_s^{(l)}})$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, либо состоят из цепей этих покрытий. И в первом, и во втором случае все цепи – кратчайшие. В первом случае цепи кратчайшие, благодаря алгоритму ВНМЦ, а во втором – это следствие особого способа задания предфрактального графа G_L (смежность его старых ребер не нарушается).

Таким образом, покрытие $J = (V_L, E_J)$ состоит из множества простых цепей $\{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_K\}$, причем каждая цепь $C_k = \{v_k, u_k\}$ – кратчайшая $k = \overline{1, K}$, среди всех возможных цепей между вершинами $v_k, u_k \in V_L$ предфрактального графа G_L.

Примечание 2. Все цепи отдельно взятого суграфа $J_s^{(l)} = (V_s^{(l)}, E_{J_s^{(l)}})$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$, вошедшие в множество $\{C_1, C_2, ..., C_k, ..., C_K\}$, полностью принадлежащие подграф-затравке $z_s^{(l)}$, т.е. ребра этих цепей имеют один и тот же ранг, являются 1-смешанными.

Литература

Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.-М.: Мир,1982.

Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.

Кочкаров А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. – Нижний Архыз: Препринт САО №133, 1998.

Павлов Д.А. Многокритериальная задача покрытия фрактальных и предфрактальных графов простыми цепями. Черкесск, 2004г. Деп. в ВИНИТИ, №1248-В2004, С.1-12.

Бесплатно

Д.А.Павлов, А.А.Кочкаров, А.А.Узденов

ОБ ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫДЕЛЕНИЯ НАИБОЛЬШИХ МАКСИМАЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ НА ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФАХ

Работа поступила в печать 9 сентября 2004 г.

Заказ №156 с Уч.изд.л.-2.0 Тираж25
Специальная астрофизическая обсерватория РАН