

УДК 521.19; 52–14; 524.6–3/32

## ТРЕХКОМПОНЕНТНАЯ ШТЕККЕЛЕВСКАЯ МОДЕЛЬ ГАЛАКТИКИ, ОСНОВАННАЯ НА КРИВОЙ ВРАЩЕНИЯ ПО ДАННЫМ О МАЗЕРАХ

© 2021 А. О. Громов<sup>1\*</sup>, И. И. Никифоров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 198504 Россия

Поступила в редакцию 3 апреля 2020 года; после доработки 28 декабря 2020 года; принята к публикации 28 декабря 2020 года

Построена трехкомпонентная штеккелевская модель Галактики, включающая балдж, диск и гало. Оценки параметров потенциала получены в результате процедуры оптимизации модельной кривой вращения по отношению к азимутальным скоростям, найденным по данным о тригонометрических параллаксах и пространственных скоростях мазеров. Метод оптимизации учитывает измерительную и природную дисперсии азимутальных скоростей и использует алгоритм исключения объектов с избыточными невязками. С целью получения более однородных выборок объекты были разделены на две группы: мазеры в областях образования массивных звезд и мазеры остальных типов. Выявлена и учтена значительная кинематическая неоднородность этих групп: дисперсия азимутальных скоростей у первой группы равна  $\sigma_{0,1} = 4.3 \pm 0.4 \text{ км с}^{-1}$ , у второй —  $\sigma_{0,2} = 15.2 \pm 1.3 \text{ км с}^{-1}$ . После построения модели потенциала в плоскости Галактики выполнено обобщение потенциала на все пространство в предположении существования третьего квадратичного интеграла движения. При детальном воспроизведении кривой вращения Галактики использованный алгоритм дает аналитическое выражение для штеккелевского потенциала, что существенно упрощает задачу построения модели фазовой плотности Галактики в штеккелевском приближении. Для дальнейшего повышения реалистичности штеккелевской модели необходима разработка способов непосредственного учета сведений о вертикальном распределении плотности в Галактике.

Ключевые слова: *методы: аналитические — методы: анализ данных — Галактика: структура — Галактика: кинематика и динамика*

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Штеккелевские модели широко обсуждаются в работах так или иначе связанных с построением фазовых моделей звездных систем, в том числе нашей Галактики. Это связано с возможностью существования в таких моделях третьего квадратичного по скоростям интеграла движения (помимо двух классических интегралов энергии и площадей)

$$I_3 = (Rv_z - zv_R)^2 + z^2 v_\lambda^2 + z_0^2 (v_z^2 - 2\Phi^*), \quad (1)$$

где

$$z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial R} = z^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} = (R^2 + z_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial R}.$$

Здесь  $R, \lambda, z$  — цилиндрические координаты,  $\Phi$  — потенциал рассматриваемой модели, а  $z_0$  — некоторая постоянная размерности длины.

Такой интеграл получил широкое применение в звездной динамике, например, в работах Kuzmin (1952), Kuzmin and Malasidze (1987), Osipkov (1975) и многих других авторов.

Для большинства подсистем Галактики эллипсоид скоростей, определенный по собственным движениям и лучевым скоростям звезд, является трехосным (см., например, данные о главных дисперсиях скоростей для звезд главной последовательности с различными значениями показателя цвета ( $B - V$ ) в монографии Binney and Merrifield (1998)). Одна из осей эллипсоида совпадает с осью  $v_\lambda$ . Если фазовая плотность зависит от трех интегралов движения, то этот факт можно объяснить, не выходя за рамки теории стационарной Галактики. Кроме того, для моделей с тремя интегралами движения задача вычисления орбит может быть решена в квадратурах. Поскольку радиальная дисперсия скоростей существенно превосходит вертикальную не только для близких звезд, но и для объектов, представляющих значительный промежуток галактоцентрических расстояний (например, Bond et al. 2010, Rastorguev et al. 2017), в дальнейшем мы будем предполагать су-

\*E-mail: granat08@yandex.ru

ществование для всей Галактики глобального третьего интеграла как аргумента фазовой плотности. Заметим, что выбор параметра  $z_0$  (см. раздел 4), возможные вариации которого означают различие выражений локальных интегралов для отдельных звезд, можно рассматривать и как выбор некоторого среднего значения  $z_0$  для последних, что и в этом случае позволяет говорить о некотором общем квазиинтеграле движения.

Для практических целей нужно учитывать только однозначные интегралы движения: если аргументами фазовой плотности являются неизоллирующие интегралы, то она сама становится бесконечно многозначной, что лишено физического смысла (см., например, монографию Ogorodnikov 1958). Hénon and Heiles (1964) численно показали, что при достижении некоторого критического значения энергии образуются эргодические области, где третий интеграл становится неизоллирующим. Rodionov (1974) установил, что для избегания таких «эргодических прослоек» необходима шестикратная непрерывная дифференцируемость потенциала в центре системы.

Возможность существования подобных третьих интегралов рассматривалась и для других галактик (например, Binney et al. 1990, Merrifield 1991).

Условие существования третьего квадратичного интеграла движения (1) записывается в виде

$$3 \left( z \frac{\partial \Phi}{\partial R} - R \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - (R^2 + z_0^2 - z^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z} + Rz \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (2)$$

При дальнейшей работе удобно перейти к эллиптическим координатам:  $\xi_1 \in [1; \infty)$ ,  $\xi_2 \in [-1; 1]$ ,

$$R = z_0 \sqrt{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)}, \quad z = z_0 \xi_1 \xi_2. \quad (3)$$

Тогда ограничение (2) можно записать в форме

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} [(\xi_1^2 - \xi_2^2) \Phi] = 0, \quad (4)$$

а потенциал в свою очередь так:

$$\Phi = \frac{\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)}{\xi_1^2 - \xi_2^2}, \quad (5)$$

где  $\varphi(\xi)$  — произвольная функция.

Выражение (4) является условием разделения переменных, а значит подобные потенциалы являются сепарабельными, то есть допускающими разделение переменных в уравнении Гамильтона—Якоби. Первым класс потенциалов, удовлетворяющих (5), в своих работах ввел Stäckel (1890).

Впоследствии такие потенциалы были названы штеккелевскими. В звездную динамику их ввел Eddington (1915).

Еще одним преимуществом штеккелевских потенциалов при фазовом моделировании является возможность описания моделей в переменных «действие—угол». В литературе встречается множество выражений для фазовой плотности в таких переменных (например, Dehnen 1999, Posti et al. 2015). Алгоритм определения действий и углов в сепарабельных потенциалах (одним из видов которых являются штеккелевские) был разработан Дж. Бинни (J. Binney) с коллегами. Данный подход пришел на смену методу построения торов (Kaasalainen and Binney 1994), который оказался неудобен, так как дает зависимость фазовых переменных от действий и углов, а не наоборот, как требуется, и методу адиабатических инвариантов Binney (2010), который оказался хорошим только для звезд близких к экваториальной плоскости.

Для задания штеккелевского потенциала в модельных задачах Sanders (2012), Binney (2012), Sanders and Binney (2016) используют алгоритм «штеккелевской подгонки» («Stäckel fudge»), в котором функция  $\varphi(\xi)$  является интерполяцией по некоторому количеству точек орбиты в предположении, что в них нештеккелевский потенциал обладает свойствами штеккелевского. Однако данный подход является приближенным. Кроме того, параметр  $z_0$  при таком подходе меняется от орбиты к орбите. В силу этого можно лишь говорить о некотором локальном третьем интеграле, так как условие постоянства  $z_0$  является ключевым для сохранения интеграла  $I_3$ . Какой интеграл является аргументом фазовой плотности в случае непостоянного  $z_0$ , не вполне ясно.

Несомненно, работы в рамках штеккелевской подгонки внесли большой вклад в развитие методов фазового моделирования звездных систем. Однако поскольку аргументами фазовой плотности, строго говоря, должны быть глобальные интегралы, альтернативный подход, основанный на интеграле  $I_3$  с постоянным  $z_0$  как ином варианте аппроксимации более сложной реальности также, на наш взгляд, представляет интерес. В отличие от численного, многоступенчатого алгоритма «Stäckel fudge» такой подход является аналитическим и более простым. Попытке реализации этого аналитического подхода и посвящена настоящая статья. Какой из методов в конечном счете окажется точнее и удобнее, покажет будущее.

Первым шагом при построении фазовой модели является получение модели потенциала, согласующейся с наблюдениями. К сожалению, исследований, в которых штеккелевские потенциалы

строятся по данным наблюдений, известно немного. Одной из первых является работа Satoh and Miyamoto (1976), в которой однокомпонентная модель Галактики находилась по данным о галактическом вращении и по величине плотности в окрестности Солнца,  $\rho_{\odot}$ . Однако в работе используется всего 18 объектов с расстояниями до 10 кпк. Кроме того, в статье Satoh and Miyamoto (1976) принято значение  $\rho_{\odot} = 0.148 M_{\odot} \text{пк}^{-3}$ , которое не согласуется с современными результатами Bland-Hawthorn and Gerhard (2016), Loktin and Marsakov (2009).

В более поздней работе Famaey and Dejonghe (2003) штеккелевские модели Галактики строятся на основе производных, преимущественно локальных, динамических характеристик (локальная круговая скорость, плоская кривая вращения, постоянные Оорта и другие). Такие модели носят лишь репрезентативный характер; в дальнейшем, как отмечают и сами авторы Famaey and Dejonghe (2003), нужно непосредственно использовать более обширные кинематические данные, но такая работа не была проделана. Формально представленные в Famaey and Dejonghe (2003) модели — трехкомпонентные, однако третья компонента в них возникает лишь благодаря добавлению, в основном в демонстрационных целях, к сфероиду и (тонкому) диску компоненты толстого диска, динамический вклад которого мал по сравнению с тонким диском (Bland-Hawthorn and Gerhard 2016).

Следует также отметить статью Binney and Wong (2017), в которой аппарат штеккелевской подгонки применяется к данным о шаровых скоплениях Галактики и строится фазовая модель для системы этих скоплений. Однако, как указывалось выше, использование алгоритма «Stäckel fudge» дает только некоторое приближение к штеккелевской модели.

Данная работа, в которой реализуется аналитический подход к построению штеккелевской модели Галактики, является первой в цикле работ, конечным результатом которых является построение фазовой модели Галактики, согласующейся с большим набором сведений, установленных из наблюдений. По данным о кинематике мазеров с тригонометрическими параллаксами мы находим оптимальные параметры модельного потенциала в плоскости Галактики, который затем обобщаем на три измерения в предположении существования третьего квадратичного интеграла движения. В результате мы строим трехкомпонентную (гало, диск, балдж) штеккелевскую модель Галактики по современным данным о ее вращении, затем мы обсуждаем реалистичность этой модели.

## 2. МЕТОД

Штеккелевские модели для Галактики, построенные в упомянутых выше работах, являются лишь приближенными (репрезентативными или приближенно штеккелевскими). Проблему можно решить методом предложенным в 1974 г. Родионовым (Rodionov 1974), позволяющим обобщить потенциал из экваториальной плоскости на все пространство штеккелевским образом, получив в результате аналитическое выражение. Так как при этом на потенциал в экваториальной плоскости не накладывается никаких ограничений, то для построения штеккелевской модели может быть использована любая модель, полученная, например, путем аппроксимации данных о вращении «холодной» галактической подсистемы, охватывающих большой промежуток расстояний  $R$ ; в частности, можно использовать данные о мазерах и, в перспективе, каталог Gaia.

Если потенциал задан в экваториальной плоскости, то  $\varphi(\xi)$  определяется так (Rodionov 1974):

$$\varphi(\xi) = \xi^2 \Phi \left( R = z_0 \sqrt{|\xi^2 - 1|}, z = 0 \right). \quad (6)$$

При этом выборе функции  $\varphi(\xi)$  выполняются условия:

- 1)  $\varphi(0) = 0$ ;
- 2)  $\varphi(1) = \Phi_0$ , где  $\Phi_0$  — значение потенциала в центре модели;
- 3) при  $\xi \rightarrow \infty$   $\frac{\varphi(\xi)}{\xi} \rightarrow \frac{GM}{z_0}$ , где  $G$  — гравитационная постоянная,  $M$  — полная масса.

Также автором метода (Rodionov 1974) предлагались способы оценки функции  $\varphi(\xi)$ , если потенциал задан на оси  $z$  и в произвольном столбе  $(R_*, z)$ , где  $R_* = \text{const}$ .

Ранее таким методом нами были построены тестовые одно- и двухкомпонентные штеккелевские модели Галактики (Gromov et al. 2015; 2016). При этом использовались как данные о вращении нейтрального водорода, так и данные о мазерах. Мы получили хорошее согласие между модельными кривыми вращения и наблюдательными данными, а также между модельными значениями и оценками плотности в окрестности Солнца, массы в шаре радиусом 50 кпк и других динамических характеристик.

В этой работе тем же методом мы строим более реалистичную — трехкомпонентную — штеккелевскую модель Галактики в классическом составе: гало, диск и балдж. Так как нашей целью является выяснение применимости метода Родионова при

раздельном представлении в модели основных динамических компонент Галактики, дальнейшая детализация модели (например, добавление толстого диска) представляется на данном этапе излишней.

Для описания гало был выбран квазиизотермический потенциал, предложенный в работе Kuzmin et al. (1986):

$$\Phi_1(R, 0) = \Phi_{0,1} \ln \left( 1 + \frac{\beta}{w(R)} \right), \quad (7)$$

где функция  $w(R)$  определяется как

$$w^2(R) = 1 + \kappa_1^2 R^2.$$

Диск был представлен обобщенно-изохронным потенциалом (Kuzmin and Malasidze 1969):

$$\Phi_2(R, 0) = \Phi_{0,2} \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 R^2}}. \quad (8)$$

Для описания центрального балджа использован потенциал Хернквиста (Hernquist 1990):

$$\Phi_3(R, 0) = \Phi_{0,3} \frac{1}{R + \kappa_3}. \quad (9)$$

Согласно (6) функции  $\varphi_i(\xi)$  для отдельных компонент имеют следующий вид:

$$\varphi_1(\xi) = \xi^2 \Phi_{0,1} \ln \left( 1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa_1^2 z_0^2 |\xi^2 - 1|}} \right), \quad (10)$$

$$\varphi_2(\xi) = \xi^2 \Phi_{0,2} \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 z_0^2 |\xi^2 - 1|}}, \quad (11)$$

$$\varphi_3(\xi) = \xi^2 \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 |\xi^2 - 1|} + \kappa_3}. \quad (12)$$

В результате итоговое выражение для функции штеккелевского потенциала получается аналитическим, что позволяет находить значения функции и, как следствие, значения переменных действия во всей области определения фазовых координат, а не в отдельных точках:

$$\varphi(\xi) = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) + \varphi_3(\xi) \quad (13)$$

При этом значения  $\varphi(\xi)$  определяются точно, а точность вычисления переменных действия, выражающихся через сложные интегралы, ограничена лишь точностью численных методов нахождения последних.

### 3. НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

В работе используются данные о мазерах, расположенных в областях звездообразования. РСДБ-наблюдения позволяют получать точные

**Таблица 1.** Список дополнительных мазерных источников из каталога Rastorguev et al. (2017), которые принадлежат областям образования звезд высокой массы (HMSFRs) согласно Nikiforov and Veselova (2018)

G170.66–00.25	G059.83+00.67
G213.70–12.60	G071.52–00.38
G054.10–00.08	G305.200+0.019
G058.77+00.64	G305.202+0.208
G059.47–00.18	

оценки тригонометрических параллакс и собственных движений, в том числе и даже преимущественно для весьма далеких от Солнца ( $r \gtrsim 10$  кпк) мазерных источников (Nikiforov and Veselova 2018).

В качестве основной базы данных о мазерах был взят каталог из работы Rastorguev et al. (2017), включающий 103 области образования звезд высокой массы (HMSFRs) из однородного каталога Reid et al. (2014) и 38 дополнительных мазерных источников, из которых, как установлено в Nikiforov and Veselova (2018), девять относятся к классу HMSFRs (см. таблицу 1), а остальные — к другим типам (далее — мазеры не-HMSFRs). Кроме того, было добавлено еще 3 мазера с полными данными: Sh2-76EMM1, Sh2-76EMM2 (G040.44+02.45) (Chibueze et al. 2017) и AFGL 5142 (G174.20–00.07) (Burns et al. 2017); все они принадлежат к группе не-HMSFRs. Таким образом, полная выборка состояла из 144 объектов.

Как показано в Nikiforov and Veselova (2018), измерительная неопределенность параллакс у мазеров не-HMSFRs в среднем заметно выше, чем у мазеров HMSFRs. Кроме того, в отличие от источников HMSFRs, принадлежащих к одному и тому же классу объектов, мазеры не-HMSFRs относятся к 14 разным классам (Nikiforov and Veselova 2018). Последнее позволяет предположить кинематическую неоднородность выборки, объединяющей эти объекты. Поэтому при обработке данных мы в общем случае различали мазеры HMSFRs (112 объектов) и не-HMSFRs (32 объекта). В частности, динамическое моделирование проводилось отдельно для более однородной группы HMSFRs и для объединенной выборки (HMSFRs + не-HMSFRs). Отдельно выборка не-HMSFRs не рассматривалась, так как ее объем недостаточен для решения поставленной в работе задачи. Ниже будет показано, что мазеры HMSFRs и не-HMSFRs действительно кинематически неоднородны по отношению друг к другу.

## 4. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ

Параметры модельного потенциала, описанного в разделе 2, оценивались нелинейным методом наименьших квадратов. При этом невязкой для отдельного объекта служила разность между модельным значением круговой скорости  $\theta_C(R_i)$ , где  $R_i$  — галактоосевое расстояние данного объекта, и азимутальной скоростью  $\theta_i$ , вычисленной по измеренному положению и трем компонентам скорости объекта (подробнее см. Gromov et al. (2016)<sup>1</sup>). Поскольку природная дисперсия азимутальных скоростей мазеров считалась заранее не известной, на начальном этапе минимизировалась целевая функция

$$L^2 = \sum_{i=1}^N p_i [\theta_i - \theta_C(R_i)]^2, \quad (14)$$

где

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (15)$$

есть вес  $i$ -го объекта, учитывающий только измерительную неопределенность  $\sigma_i$  скорости  $\theta_i$  (см. Gromov et al. 2016);  $\theta_C^2 = -R \frac{d\Phi}{dR}$ ,

$$\Phi(R, 0) = \Phi_1(R, 0) + \Phi_2(R, 0) + \Phi_3(R, 0);$$

$N$  — объем рассматриваемой выборки.

Полученные путем минимизации (14) оценки параметров по мазерам HMSFRs и для объединенной выборки представлены в таблице 2, соответствующие модельные кривые вращения сопоставлены с наблюдательными данными на рис. 1. Так как в некоторых вариантах расчетов в настоящей работе значение параметра  $\beta$  получается предельным —  $\beta \rightarrow \infty$  (в таком случае квазиизотермический потенциал переходит в потенциал Шустера–Пламмера), — вместо него оценивался связанный с ним параметр  $q = \frac{\beta}{\beta + 1} \in [0; 1)$ .

При минимизации (14) с весами (15) значения  $L^2/N_{\text{free}}$  (приведенная статистика  $\chi^2$ ), где  $N_{\text{free}} = N - M$  — число степеней свободы,  $M$  — число определяемых параметров, получились много большими единицы (таблица 2). Это означает, что отклонения азимутальных скоростей  $\theta_i$  мазеров от модели не могут быть объяснены только ошибками измерений, следовательно, природную дисперсию скоростей необходимо учитывать даже для такой «холодной» подсистемы диска как

**Таблица 2.** Решение без учета природной дисперсии азимутальных скоростей

Характеристика	HMSFRs	HMSFRs + не-HMSFRs
$N$	112	144
$q$	$0.6748 \pm 0.0073$	$0.8421 \pm 0.0022$
$\kappa_1$ , кпк <sup>-1</sup>	$0.0611 \pm 0.0013$	$0.2888 \pm 0.0035$
$\Phi_{0,1}$ , км <sup>2</sup> с <sup>-2</sup>	$305.5 \pm 6.5$	$262.8 \pm 1.1$
$\alpha$	$1.214 \pm 0.023$	$1.240 \pm 0.019$
$\kappa_2$ , кпк <sup>-1</sup>	$0.533 \pm 0.015$	$0.10102 \pm 0.00029$
$\Phi_{0,2}$ , км <sup>2</sup> с <sup>-2</sup>	$400.6 \pm 5.0$	$310.83 \pm 0.97$
$\Phi_{0,3}$ , км <sup>2</sup> с <sup>-2</sup>	$230.4 \pm 14.3$	$233.7 \pm 3.7$
$\kappa_3$ , кпк	$0.25 \pm 0.12$	$0.70 \pm 0.24$
$L^2/N_{\text{free}}$	236	713

мазеры (в согласии с результатами Rastorguev et al. 2017).

Поэтому на втором этапе величина природной дисперсии  $\sigma_0$  азимутальных скоростей мазеров была введена как (неизвестный) параметр в целевую функцию посредством записи весовых коэффициентов в виде:

$$p_i = (\sigma_i^2 + \sigma_0^2)^{-1}, \quad (16)$$

где  $\sigma_i$  — измерительная неопределенность  $\theta_i$ .

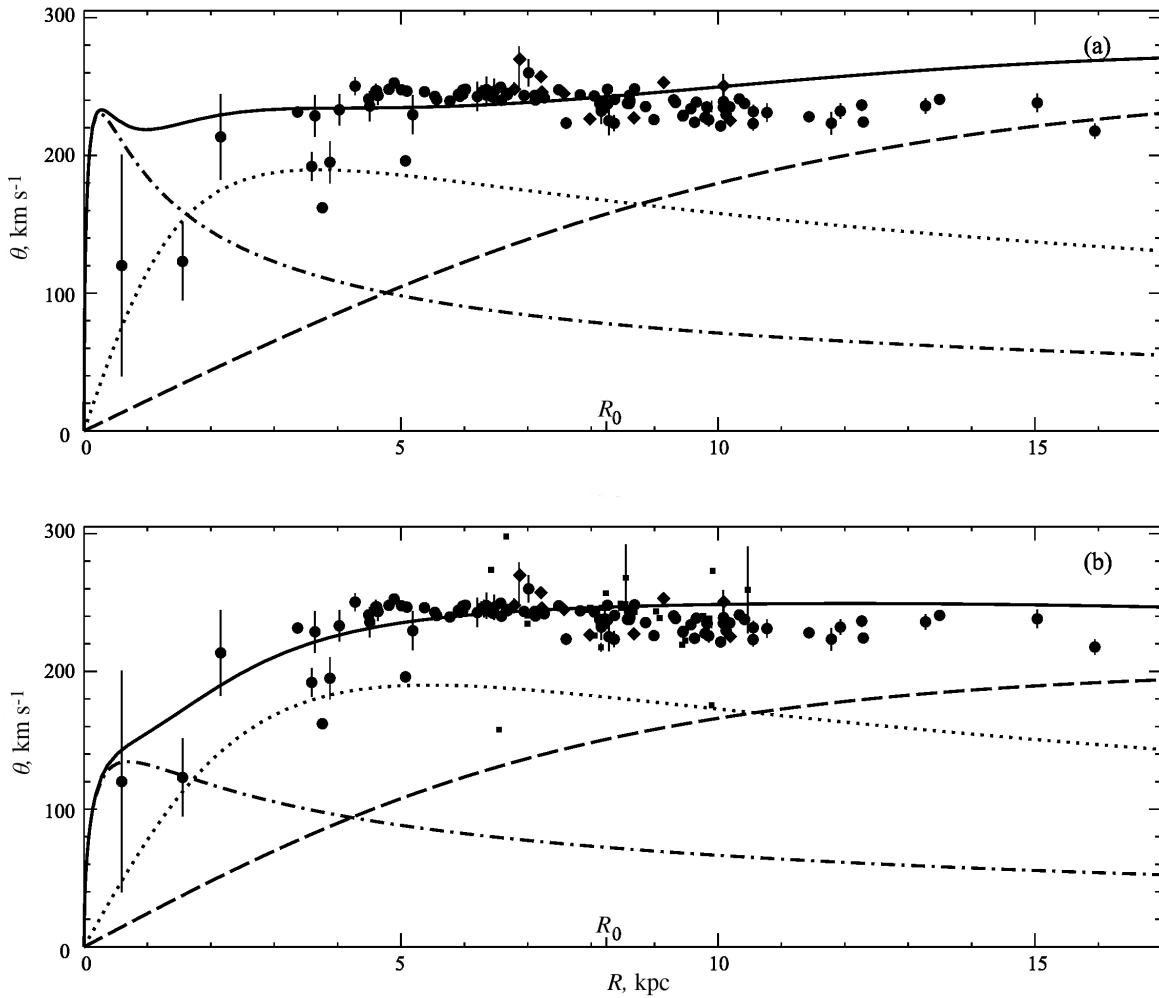
Величина  $\sigma_0$  оценивалась в ходе итеративной процедуры, на каждом шаге которой при фиксированных значениях параметров потенциала, полученных на предыдущем шаге, природная дисперсия определялась из уравнения:

$$L^2(\sigma_0^2) = N_{\text{free}}. \quad (17)$$

При найденном на данном шаге значении  $\sigma_0$  параметры потенциала определялись заново в результате минимизации функции (14) с системой весов (16). Найденные оценки параметров использовались на следующем шаге для нахождения нового приближения  $\sigma_0$ . Во всех случаях процедура сходилась за три шага. В качестве начального приближения брался результат, полученный с системой весов (15).

Для проверки и учета кинематической неоднородности группы не-HMSFRs по отношению к группе HMSFRs помимо величины природной дисперсии, общей для объединенной выборки HMSFRs + не-HMSFRs (назовем этот вариант «подходом 1»), оценивались также значения этой дисперсии для группы HMSFRs,  $\sigma_{0,1}$ , и группы

<sup>1</sup>В п. 7 Приложения Gromov et al. (2016) правильной является формула  $\sin \beta = \frac{r \cos b}{R} \sin l$ .



**Рис. 1.** Модельные кривые круговой скорости, полученные без учета природной дисперсии азимутальных скоростей: по мазерам HMSFRs (a), по объединенной выборке HMSFRs + не-HMSFRs (b). Сплошная линия — трехкомпонентная модель Галактики; штриховая линия — квазиизотермическая компонента, представляющая гало; пунктирная линия — обобщенно-изохронная компонента, описывающая диск; штрих-пунктирная линия — компонента Хернквиста, представляющая балдж. Показаны значения азимутальных скоростей мазеров, найденные по измерениям их параллакса, лучевых скоростей и собственных движений. Кружками обозначены мазеры HMSFRs из каталога Reid et al. (2014); ромбами — мазеры HMSFRs из дополнительного списка в работе Rastorguev et al. (2017); маленькими квадратами — мазеры не-HMSFRs из списка Rastorguev et al. (2017) (слабо влияют на решение). Бары отображают ошибки измерений исходных данных. Отсутствие бара означает, что он меньше размера символа, обозначающего объект. На горизонтальной оси отмечено принятое в работе расстояние от Солнца до центра Галактики  $R_0 = 8.34$  кпк (Reid et al. 2014).

не-HMSFRs,  $\sigma_{0,2}$ , по отдельности (назовем это «подходом 2»). В последнем случае для объектов HMSFRs применялись весовые коэффициенты  $p_{i,1} = (\sigma_i^2 + \sigma_{0,1}^2)^{-1}$ , а для объектов не-HMSFRs —  $p_{i,2} = (\sigma_i^2 + \sigma_{0,2}^2)^{-1}$ .

В случае двух природных дисперсий уравнение (17) можно записать так:

$$L^2(\sigma_{0,1}^2, \sigma_{0,2}^2) = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{[\theta_i - \theta_C(R_i)]^2}{\sigma_i^2 + \sigma_{0,1}^2} + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{[\theta_i - \theta_C(R_i)]^2}{\sigma_i^2 + \sigma_{0,2}^2} = N_{\text{free}},$$

где первая сумма берется по объектам HMSFRs, а вторая — по объектам не-HMSFRs. При верных дисперсиях в знаменателях двух сумм, вклад каждой из них в общий итог асимптотически равен доле

Таблица 3. Решение с учетом природной дисперсии азимутальных скоростей

Характеристика	HMSFRs	HMSFRs + не-HMSFRs	
		(подход 1)	(подход 2)
$N$	112	144	144
$\sigma_0$ или $\sigma_{0,1}$ , км с <sup>-1</sup>	7.67±0.74	12.1±1.0	7.59±0.65
$\sigma_{0,2}$ , км с <sup>-1</sup>			20.9±1.8
$q$	1 <sub>-0.035</sub>	1 <sub>-0.053</sub>	1 <sub>-0.035</sub>
$\kappa_1$ , кпк <sup>-1</sup>	0.0773±0.0026	0.0734±0.0031	0.0956±0.0032
$\Phi_{0,1}$ , км <sup>2</sup> с <sup>-2</sup>	265.2±9.4	264.9±15.1	265.0±10.2
$\alpha$	0.1437±0.0041	0.1148±0.0048	0.1651±0.0062
$\kappa_2$ , кпк <sup>-1</sup>	0.0533±0.0013	0.04686±0.0016	0.0504±0.0012
$\Phi_{0,2}$ , км <sup>2</sup> с <sup>-2</sup>	311.2±3.2	318.4±4.1	317.4±3.2
$\Phi_{0,3}$ , км <sup>2</sup> с <sup>-2</sup>	224.5±15.6	223.4±20.1	223.8±15.7
$\kappa_3$ , кпк	0.71±0.32	0.72±0.34	0.76±0.31

каждой группы объектов в объединенной выборке. Это дает уравнения для определения  $\sigma_{0,1}$  и  $\sigma_{0,2}$ :

$$\sum_{i=1}^{N_1} p_{i,1} [\theta_i - \theta_C(R_i)]^2 = \frac{N_1}{N} N_{\text{free}}, \quad (18)$$

$$\sum_{i=N_1+1}^N p_{i,2} [\theta_i - \theta_C(R_i)]^2 = \frac{N_2}{N} N_{\text{free}}, \quad (19)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — количество мазеров HMSFRs и не-HMSFRs соответственно,  $N = N_1 + N_2$ ; для полной выборки  $N_1 = 112$ ,  $N_2 = 32$ ,  $N = 144$ . Величины  $\sigma_{0,1}$  и  $\sigma_{0,2}$  находились в результате итеративной процедуры, аналогичной описанной выше.

Результаты, полученные на втором этапе, представлены в таблице 3 и на рис. 2.

Решение без учета природной дисперсии азимутальных скоростей было неустойчиво относительно состава выборки (см. результаты для двух выборок в таблице 2 и на рис. 1), очевидно, из-за чрезвычайно сильного влияния объектов с большим отношением модуля невязки к (очень маленькой) измерительной ошибке (примеры хорошо видны на рис. 1). Введение природной дисперсии во многом устранило этот эффект и стабилизировало решение: все три результата получились близкими (таблица 3, рис. 2). Различаются, причем значительно, только природные дисперсии: добавление в выборку мазеров не-HMSFRs увеличивает  $\sigma_0$  в полтора раза; непосредственное измерение дисперсий для двух групп мазеров показывает, что  $\sigma_{0,2}$

кратно превышает  $\sigma_{0,1}$ . Эти факты говорят в пользу кинематической неоднородности объединенной выборки и оправданности введения для нее двух дисперсий.

Анализ невязок для полученных решений показал, что даже после учета природной дисперсии в выборке остаются объекты с выбросами в данных, которые могут сильно сместить решение. Для исключения объектов с избыточными невязками на третьем, последнем, этапе применялся следующий алгоритм с гибкой границей для критериальной статистики (Nikiforov 2012). Выявлялись объекты, для которых

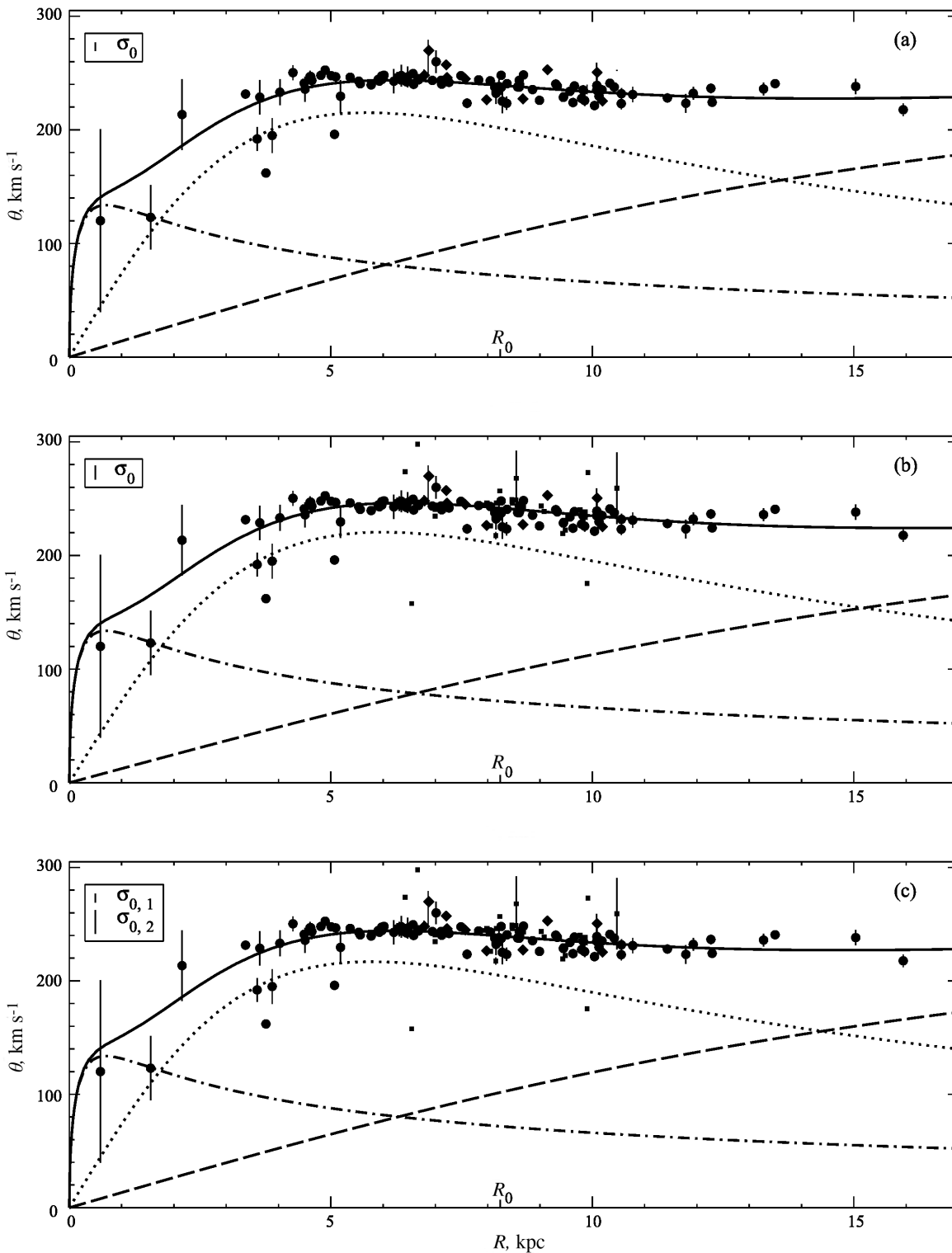
$$\frac{|\theta_i - \theta_C(R_i)|}{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_0^2}} > k, \quad (20)$$

где значение  $k$  определяется из уравнения

$$[1 - \psi(k)] N_{\text{free}} = 1,$$

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

— интеграл вероятностей, а  $\sigma_0$  — соответствующая природная дисперсия, то есть  $\sigma_0$ ,  $\sigma_{0,1}$  или  $\sigma_{0,2}$  в зависимости от подхода и объекта. Далее из  $L$  объектов, удовлетворяющих условию (20), исключались  $L - L'$  объектов, где  $L' = 3$  на стадии определения  $\sigma_0$ ,  $\sigma_{0,1}$ ,  $\sigma_{0,2}$  или  $L' = 1$  при окончательном оценке модельных параметров с найденными (фиксированными) значениями природных дисперсий (см. Nikiforov 2012). Если среди



**Рис. 2.** То же, что на рис. 1, но с учетом природной дисперсии азимутальных скоростей: по выборке HMSFRs (а), по объединенной выборке HMSFRs + не-HMSFRs с одинаковыми (б) и различными (с) природными дисперсиями для классов HMSFRs и не-HMSFRs. Слева вверху на панелях в масштабе оси ординат представлены бары среднеквадратических уклонений, соответствующие найденным природным дисперсиям.



оставшихся объектов встречаются такие, у которых невязка по модулю превосходит значение  $k_{0.05}$ , то есть корень уравнения  $[1 - \psi(k_{0.05})]N_{\text{free}} = 0.05$ , то эти объекты также исключались.

После каждой итерации исключений заново решались задачи оптимизации параметров, определения природных дисперсий и нахождения возможных выбросов в данных до тех пор, пока на очередной итерации ни один объект не будет исключен.

Также в рамках подхода 2 был принудительно отброшен объект G110.19+02.47 с отрицательной невязкой  $\lesssim 3\sigma$ , формально не являющейся избыточной согласно указанным выше критериям. Однако он отделен от массива остальных мазеров не-HMSFRs на гистограмме распределения относительных невязок. Это единственный объект, класс которого по оригинальной работе Chibueze et al. (2014) установить не удалось. Авторы (Chibueze et al. 2014) также отмечают низкое значение азимутальной скорости этого объекта, увязывая ее с локальной, не характеризующей Галактику в целом, кинематической аномалией рукава Персея в области «прогиба» кривой вращения на  $R \sim 9$  кпк. Кроме того, включение этого объекта в выборку заметно увеличивает значение  $\sigma_{0,2}$  — с  $15.2 \pm 1.3$  (окончательная оценка) до  $19.6 \pm 1.7$  км/с. Поэтому мазер G110.19+02.47 был отброшен как вероятно аномальный объект.

Список исключенных объектов для рассмотренных выборок и подходов представлены в таблице 4. Окончательные результаты оптимизации модельных параметров по данным о мазерах представлены в таблице 5 и на рис. 3. Модельные массы компонент в пределах шара радиусом 50 кпк получились следующими:  $M_{\text{bulge}} = 1.1 \times 10^{10} M_{\odot}$ ,  $M_{\text{disk}} = 8.7 \times 10^{10} M_{\odot}$ ,  $M_{\text{halo}} = 7.2 \times 10^{11} M_{\odot}$ .

Параметр  $z_0$  штеккелевского потенциала определялся из соотношения:

$$z_0^2(R) = \frac{3 \frac{\partial \Phi}{\partial R}(R, 0) + R \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}(R, 0) - 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}(R, 0) \right]}{\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^2 \partial R}(R, 0)} - R^2. \quad (21)$$

Подобные функции для  $z_0$  строили Einasto and Rummel (1970), а также Osipkov (1975). В качестве потенциала  $\Phi(R, z)$  для нахождения  $z_0$  мы взяли трехкомпонентный потенциал из работы Gardner et al. (2011), так как при его построении использовались данные о вертикальной структуре

**Таблица 4.** Списки исключенных из обработки объектов в порядке их отбрасывания при окончательной оценке модельных параметров ( $L' = 1$ ). Критические значения  $k$  и  $k_{0.05}$  указаны для финальных объемов выборок

Объект	$\frac{ \theta_i - \theta_C(R_i) }{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_{0,i}^2}}$
HMSFRs	
( $k = 2.59, k_{0.05} = 3.49$ )	
G348.70-01.04	5.53
G023.44-00.18	4.01
G213.70-12.60	4.12
HMSFRs+не-HMSFRs	
Подход 1	
( $k = 2.67, k_{0.05} = 3.55$ )	
G348.70-01.04	3.75
G110.10+02.47	4.87
G353.27+00.64	4.28
G173.72-02.70	4.35
G023.44-01.18	4.14
G045.37-00.22	4.24
G339.88-01.26	3.80
Подход 2	
( $k = 2.67, k_{0.05} = 3.56$ )	
G348.70-01.04	5.83
G110.10+02.47	—
G353.27+00.64	3.06
G213.70-12.60	4.00
G023.44-01.18	4.11
G045.37-00.22	4.13

Галактики. Полученное нами значение  $z_0 = 5.3$  кпк согласуется с оценками, приведенными в других работах:  $z_0 = [2.2; 7]$  кпк (Hori 1962, Kuzmin 1953; 1956, Malasidze 1973). Следует отметить, что в некоторых из этих работ принимались величины расстояния до центра Галактики  $R_0$ , заниженные по сравнению с современными. Например,  $R_0 = 7.0$  кпк в Kuzmin (1956) ( $z_0 = 3.1$  кпк),  $R_0 = 7.2$  кпк в Kuzmin (1953) ( $z_0 = 3.6$  кпк). Кроме того, во всех указанных

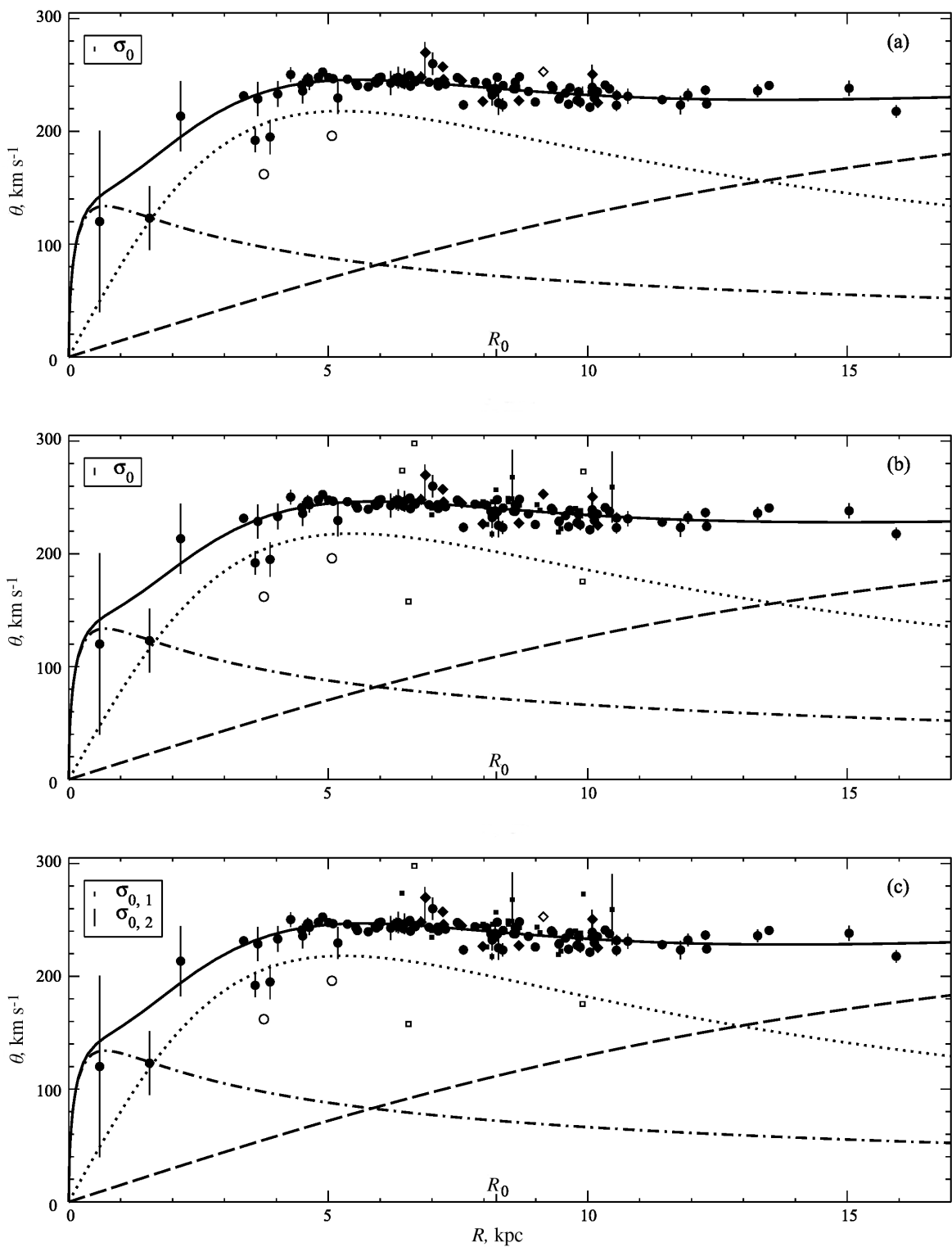


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но после исключения из обработки мазеров с выбросами в данных и аномального объекта. Светлыми символами обозначены отброшенные объекты.

**Таблица 5.** Решение с учетом природной дисперсии азимутальных скоростей после исключения из обработки мазеров с выбросами в данных и аномального объекта

Характеристика	HMSFRs	HMSFRs + не-HMSFRs	
		(подход 1)	(подход 2)
$N$	109	137	138
$\sigma_0$ или $\sigma_{0,1}$ , км с <sup>-1</sup>	3.85±0.38	6.56±0.57	4.34±0.38
$\sigma_{0,2}$ , км с <sup>-1</sup>			15.2±1.3
$q$	1 <sup>+0</sup> <sub>-0.018</sub>	0.943±0.023	1 <sup>+0</sup> <sub>-0.014</sub>
$\kappa_1$ , кпк <sup>-1</sup>	0.1173±0.0023	0.1012±0.0025	0.0830±0.0020
$\Phi_{0,1}$ , км <sup>2</sup> с <sup>-2</sup>	264.6±6.0	264.5±7.2	264.6±5.3
$\alpha$	0.2495±0.0046	0.1651±0.0046	0.1068±0.0031
$\kappa_2$ , кпк <sup>-1</sup>	0.05455±0.00085	0.0575±0.0011	0.05645±0.00055
$\Phi_{0,2}$ , км <sup>2</sup> с <sup>-2</sup>	321.2±1.9	318.9±3.1	315.6±1.7
$\Phi_{0,3}$ , км <sup>2</sup> с <sup>-2</sup>	226.5±9.7	223.6±13.4	224.3±7.4
$\kappa_3$ , кпк	0.75±0.12	0.66±0.25	0.79±0.12

работах рассматривались сферические модели, что уменьшает значение  $z_0$ . Полученная нами величина  $z_0$  близка к значению  $z_0 = 4.8$  кпк, приведенному в Malasidze (1973).

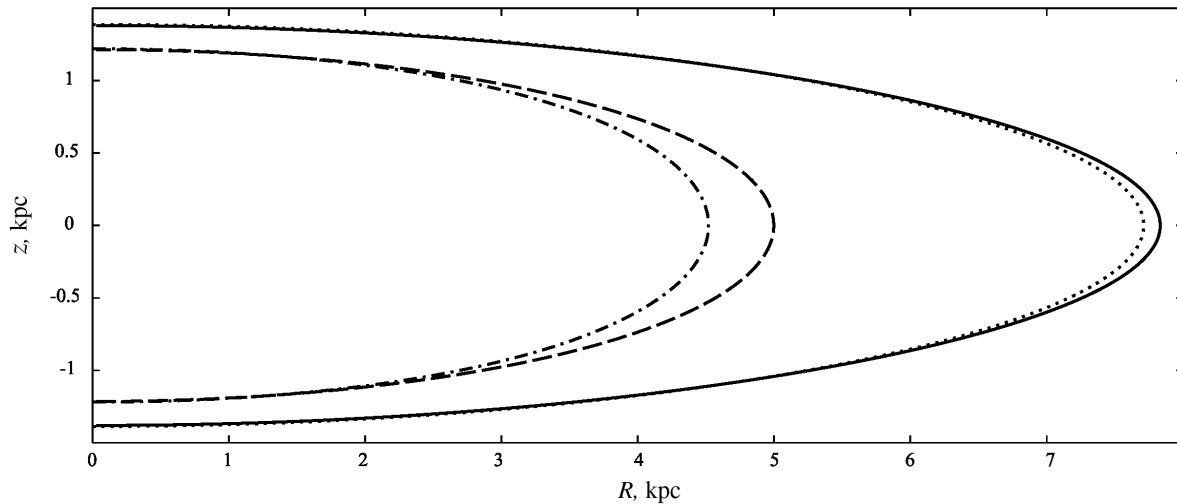
## 5. ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотренные в работе варианты процедуры определения параметров модели потенциала Галактики по мазерам показывают, что учет даже небольшой природной дисперсии азимутальных скоростей мазеров необходим при современной высокой точности данных об этих объектах. Полученная азимутальная дисперсия для объединенной выборки  $\sigma_0 = 6.56 \pm 0.57$  км с<sup>-1</sup> является промежуточной между радиальной ( $\sigma_{U,0} = 9.4 \pm 0.9$  км с<sup>-1</sup>) и вертикальной ( $\sigma_{W,0} = 5.9 \pm 0.8$  км с<sup>-1</sup>) природными дисперсиями, найденными в Rastorguev et al. (2017) по почти той же выборке, то есть согласуется с ними. Однако азимутальная дисперсия для однородной выборки HMSFRs значительно ниже: двумя способами получены близкие значения  $\sigma_{0,1} = 3.9 \pm 0.4$  и  $4.3 \pm 0.4$  км с<sup>-1</sup> (таблица 5). С другой стороны, дисперсия для мазеров не-HMSFRs  $\sigma_{0,2} = 15.2 \pm 1.3$  км с<sup>-1</sup> (даже после исключения аномального объекта) примерно в 3.5–3.9 раза больше, чем у HMSFRs, несмотря на ожидаемую общую схожесть этих классов, что не только подтверждает кинематическую неоднородность не-HMSFRs по отношению к HMSFRs, но и говорит в пользу значительной

внутренней неоднородности группы не-HMSFRs. Малый объем выборки не-HMSFRs ( $N = 32$ ) и большое число классов объектов в ней (14 штук) не позволяют определить дисперсию для отдельных классов.

Вместе с тем, введение двух природных дисперсий для объединенной выборки привело к решению без существенных смещений точечных оценок параметров по сравнению с результатом по однородной группе HMSFRs, при этом в целом с меньшими статистическими ошибками параметров. Поэтому в качестве финального варианта для штеккелевского обобщения мы выбрали модель с двумя природными дисперсиями, найденную после исключения мазеров с избыточными невязками и аномального объекта (таблица 5, подход 2; рис. 3с).

Полученные модельные кривые вращения (рис. 3) близки к моделям, построенным по мазерам на  $R > 3-4$  кпк в Rastorguev et al. (2017), Reid et al. (2019). Наша модель лучше воспроизводит спад кривой вращения во внешней части Галактики, чем в работе Reid et al. (2019), поскольку в последней для модели заранее принималась более гладкая функциональная форма. Модель в Rastorguev et al. (2017) выявляет больше деталей, поскольку там использовалась аппроксимирующая полиномиальная модель четвертого порядка. Хорошее согласие на общем промежутке  $R$  и с кривыми вращениями по классическим цефеидам в недавних работах Ablimit et al. (2020), Mróz et al. (2019), в которых также показан медленный, но уверенный тренд снижения скорости вращения на  $R \gtrsim 6$  кпк.



**Рис. 4.** Модельные эквиденситы при  $\rho = 0.1 M_{\odot} \text{пк}^{-3}$ . Сплошная линия — трехкомпонентная модель; штриховая линия — гало; пунктирная линия — диск; штрих-пунктирная линия — балдж.

То же верно и в отношении кривой вращения по красным гигантам Eilers et al. (2019). В целом современные кривые вращения плоских подсистем довольно хорошо согласуются вне центральной области Галактики (см. также Bland-Hawthorn and Gerhard 2016). Кривые круговой скорости гало, найденные по данным Gaia о RR-лиридах (Wegg et al. 2019), близки к модели, построенной нами, особенно во внешней части Галактики. На  $R < 3$  кпк наша модель не может быть надежной, хотя бы потому, что там она основана на считанных объектах, не говоря уже о влиянии бара (Chemin et al. 2015), но все же в этой области она получилась довольно близкой к кривой вращения, построенной в обзоре Bland-Hawthorn and Gerhard (2016).

Динамическое моделирование в настоящей работе выполнено в предположении, что средняя скорость вращения мазеров близка к круговой скорости. Это предположение согласуется с низкой дисперсией азимутальных скоростей, найденной нами для мазеров, особенно для класса HMSFRs. Непосредственными оценками асимметричного сдвига для мазеров являются величины  $\bar{V}_s$  в Reid et al. (2019): они находятся в промежутке  $[-2; 9] \text{ км с}^{-1}$  для разных вариантов анализа, но даже самая точная из оценок,  $\bar{V}_s = -3.1 \pm 2.2 \text{ км с}^{-1}$ , не отличается значимо от нуля. Сходные результаты были получены и в Reid et al. (2014). Таким образом, асимметричным сдвигом для мазеров можно пренебречь, во всяком случае на современном уровне точности.

Для построенного штеккелевского потенциала (формулы (5), (10)–(13)) при помощи уравнения Пуассона было получено аналитическое выражение для пространственной плотности. Соответ-

ствующие эквиденситы (кривые равной плотности) представлены на рис. 4 для значения плотности  $\rho = 0.1 M_{\odot} \text{пк}^{-3}$ . Из рисунка очевидно, что гало в построенной модели получается несферическим. Не вполне адекватна модель и современным оценкам вертикального масштаба тонкого ( $300 \pm 50$  пк) и толстого диска ( $900 \pm 180$  пк) (Bland-Hawthorn and Gerhard 2016).

Полученные не слишком реалистичные эквиденситы ставят вопрос о необходимости дополнительно задавать в той или иной форме вертикальное распределение плотности в модели при применении метода Родионова. То есть несмотря на интересные результаты штеккелевского моделирования в ряде теоретических работ (например, Kuzmin 1952, Kuzmin and Malasidze 1987, Osipkov 1975), оказалось, что практическое применение подобных методов в общем случае не приводит к построению моделей приемлемой адекватности. Следует отметить, что за исключением тестовых работ нашей группы Gromov et al. (2015; 2016), ранее не предпринималось попыток использовать метод штеккелевского обобщения на практике (применительно к реальным данным). Поэтому заранее подобный результат был не очевиден. Учитывая получение неправдоподобных эквиденсит для дисков в работах Binney and Wong (2017), Famaey and Dejonghe (2003), в которых использовались иные методы штеккелевского моделирования (в том числе «Stäckel fudge»), эта проблема носит более общий характер и не является недостатком только лишь метода штеккелевского обобщения.

Отметим, что предварительное моделирование по новому каталогу Reid et al. (2019) дает сходные результаты, то есть характер вертикального распределения не чувствителен к данным.

Таким образом, полученная в данной работе вертикальная структура модели означает, что прямого применения метода штеккелевского обобщения недостаточно для построения реалистичных штеккелевских моделей. Для этого требуется решить вопрос об учете известных свойств вертикального распределения масс в Галактике при штеккелевском моделировании. Представляется возможным использовать ряд подходов и их комбинаций: переопределение функции  $\varphi(\xi)$  с учетом вертикального распределения; введение некоторых дополнительных условий при оценке параметров (например, в предположении барометрического распределения вертикальной плотности в предварительных вычислениях получалось добиться адекватной толщины диска); варьирование параметра  $z_0$  в целях приблизить форму гало к сферической. Эти подходы предполагается исследовать и применить в следующей работе.

Для построенной модели значение плотности в окрестности Солнца ( $R_0 = 8.34$  кпк (Reid et al. 2014))  $\rho_\odot = 0.082 M_\odot \text{пк}^{-3}$  хорошо согласуется с современными оценками:  $\rho_\odot = 0.08\text{--}0.11 M_\odot \text{пк}^{-3}$  (Loktin and Marsakov 2009),  $\rho_\odot = 0.097 \pm 0.013 M_\odot \text{пк}^{-3}$  (Bland-Hawthorn and Gerhard 2016).

Модельная величина массы в шаре радиусом 50 кпк составляет  $M_{50} = 0.82 \times 10^{12} M_\odot$ , что несколько выше, чем в других работах. Например, Deason et al. (2012) нашли

$$M_{50} = (0.42 \pm 0.04) \times 10^{12} M_\odot,$$

a Williams and Evans (2015) —

$$M_{50} = (0.45 \pm 0.15) \times 10^{12} M_\odot.$$

Модельная масса в шаре 20 кпк получилась равной  $0.35 \times 10^{12} M_\odot$ . Завышенные значения массы, вероятно, также связаны с неучетом данных о вертикальном распределении плотности.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена аналитическая трехкомпонентная штеккелевская модель Галактики по данным о мазерах с тригонометрическими параллаксами, собственными движениями и лучевыми скоростями.

Данные о мазерах использованы для оценки параметров компонент — гало, диска и балджа — модели, представляющей потенциал в плоскости Галактики. Показано, что мазеры не-HMSFRs, то есть не отнесенные к классу областей образования звезд высокой массы (HMSFRs), являются кинематически неоднородными по отношению к мазерам HMSFRs: природная (неизмерительная) дисперсия азимутальных компонент их скоростей  $\sigma_{0,2} = 15.2 \pm 1.3 \text{ км с}^{-1}$  в

3.5–3.9 раза больше, чем аналогичная дисперсия  $\sigma_{0,1} = [3.9; 4.3] \pm 0.4 \text{ км с}^{-1}$  у класса HMSFRs. Этот факт следует иметь в виду при использовании данных о кинематике неоднородных по типу мазеров. Финальная модель получена с учетом различия природных дисперсий для двух групп — HMSFRs и не-HMSFRs. Модельная кривая круговой скорости хорошо согласуется с наблюдательными данными.

Полученная модель потенциала в галактической плоскости послужила основой для построения методом Родионова (Rodionov 1974) штеккелевской модели Галактики, позволяющей находить значения потенциала во всем пространстве. Модель дает близкие к реальным значения плотности в окрестности Солнца  $\rho_\odot = 0.082 M_\odot \text{пк}^{-3}$  и общую массу  $M_{50} = 0.82 \times 10^{12} M_\odot$  (с точностью до порядка величины). Однако характер эквиденсит в меридиональной плоскости модели показывает, что одного лишь прямого применения метода штеккелевского обобщения недостаточно для построения реалистичных штеккелевских моделей. Для этого необходима разработка способов непосредственного учета данных о вертикальном распределении плотности в Галактике при применении метода Родионова.

Несмотря на выявленное, но преодолимое осложнение, подход в целом имеет значительную перспективу: предложенный простой, а главное, аналитический способ нахождения функции  $\varphi(\xi)$  штеккелевского потенциала может быть использован при нахождении действий и значительно упростить соответствующие алгоритмы построения фазовой модели Галактики.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность В. В. Бобылеву за предоставление информации о трех мазерах с полными данными и А. В. Веселовой за помощь в подготовке данных, в особенности за трудоемкую работу по идентификации типов объектов. Авторы признательны анонимному рецензенту за полезные замечания.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19–32–90144.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Ablimit, G. Zhao, C. Flynn, and S. A. Bird, *Astrophys. J.* **895** (1), L12 (2020).
2. J. Binney, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **401** (4), 2318 (2010).
3. J. Binney, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **426** (2), 1324 (2012).
4. J. Binney and M. Merrifield, *Galactic Astronomy* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998).
5. J. Binney and L. K. Wong, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **467** (2), 2446 (2017).
6. J. J. Binney, R. L. Davies, and G. D. Illingworth, *Astrophys. J.* **361**, 78 (1990).
7. J. Bland-Hawthorn and O. Gerhard, *Annual Rev. Astron. Astrophys.* **54**, 529 (2016).
8. N. A. Bond, Ž. Ivezić, B. Sesar, et al., *Astrophys. J.* **716** (1), 1 (2010).
9. R. A. Burns, T. Handa, H. Imai, et al., *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **467** (2), 2367 (2017).
10. L. Chemin, F. Renaud, and C. Soubiran, *Astron. and Astrophys.* **578**, A14 (2015).
11. J. O. Chibueze, H. Hamabata, T. Nagayama, et al., *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **466** (4), 4530 (2017).
12. J. O. Chibueze, H. Sakanoue, T. Nagayama, et al., *Publ. Astron. Soc. Japan* **66** (6), 104 (2014).
13. A. J. Deason, V. Belokurov, N. W. Evans, and J. An, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **424** (1), L44 (2012).
14. W. Dehnen, *Astron. J.* **118** (3), 1201 (1999).
15. A. S. Eddington, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **76**, 37 (1915).
16. A.-C. Eilers, D. W. Hogg, H.-W. Rix, and M. K. Ness, *Astrophys. J.* **871** (1), 120 (2019).
17. J. Einasto and U. Rummel, *Astrophysics* **6** (2), 120 (1970).
18. B. Famaey and H. Dejonghe, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **340** (3), 752 (2003).
19. E. Gardner, P. Nurmi, C. Flynn, and S. Mikkola, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **411** (2), 947 (2011).
20. A. O. Gromov, I. I. Nikiforov, and L. P. Ossipkov, *Baltic Astronomy* **24**, 150 (2015).
21. A. O. Gromov, I. I. Nikiforov, and L. P. Ossipkov, *Baltic Astronomy* **25**, 53 (2016).
22. M. Henon and C. Heiles, *Astron. J.* **69**, 73 (1964).
23. L. Hernquist, *Astrophys. J.* **356**, 359 (1990).
24. G. Hori, *Publ. Astron. Soc. Japan* **14**, 353 (1962).
25. M. Kaasalainen and J. Binney, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **268**, 1033 (1994).
26. G. G. Kuzmin, *Publ. Tartu Astrofiz. Obs.* **32**, 332 (1952).
27. G. G. Kuzmin, *Izvestiya Akad. Nauk ESSR* **2**, 3 (1953).
28. G. G. Kuzmin, *Astron. Zh.* **33**, 27 (1956).
29. G. G. Kuzmin and G. A. Malasidze, *Akademiia Nauk Gruzinskoj SSR* **54**, 565 (1969).
30. G. G. Kuzmin and G. A. Malasidze, *Publ. Tartu Astrofiz. Obs.* **52**, 48 (1987).
31. G. G. Kuzmin, Ü. I. K. Veltmann, and P. L. Tenjes, *Publ. Tartu Astrofiz. Obs.* **51**, 232 (1986).
32. A. V. Loktin and Marsakov V. A., *Lecscii po zvezdnoi astronomii* (SFedU, Rostov-na-Dony, 2009).
33. G. A. Malasidze, *Proc. conf. on Dynamics of Galaxies and Star Clusters*, pp. 93–98 (1973).
34. M. R. Merrifield, *Astron. J.* **102**, 1335 (1991).
35. P. Mróz, A. Udalski, D. M. Skowron, et al., *Astrophys. J.* **870** (1), L10 (2019).
36. I. I. Nikiforov, *Astronomical and Astrophysical Transactions* **27** (3), 537 (2012).
37. I. I. Nikiforov and A. V. Veselova, *Astronomy Letters* **44** (11), 699 (2018).
38. K. F. Ogorodnikov, *Dinamika zvezdnykh sistem* (Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematichskoi literatury, Moskva, 1958) [in Russian].
39. L. P. Ossipkov, in *Vestnik Leningradskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. Astronomiia*, pp. 151–158 (1975) [in Russian].
40. L. Posti, J. Binney, C. Nipoti, and L. Ciotti, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **447** (4), 3060 (2015).
41. A. S. Rastorguev, N. D. Utkin, M. V. Zabolotskikh, et al., *Astrophysical Bulletin* **72** (2), 122 (2017).
42. M. J. Reid, K. M. Menten, A. Brunthaler, et al., *Astrophys. J.* **793** (2), 72 (2014).
43. M. J. Reid, K. M. Menten, A. Brunthaler, et al., *Astrophys. J.* **885** (2), 131 (2019).
44. V. I. Rodionov, in *Vestnik Leningradskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. Astronomiia*, pp. 142–148 (1974) [in Russian].
45. J. Sanders, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **426** (1), 128 (2012).
46. J. L. Sanders and J. Binney, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **457** (2), 2107 (2016).
47. C. Satoh and M. Miyamoto, *Publ. Astron. Soc. Japan* **28** (4), 599 (1976).
48. P. Stäckel, *Math. Annal.* **35**, 91 (1890).
49. C. Wegg, O. Gerhard, and M. Bieth, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **485** (3), 3296 (2019).
50. A. A. Williams and N. W. Evans, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **454** (1), 698 (2015).

## Three-Component Stäckel Model of the Galaxy Based on the Rotation Curve from Maser Data

A. O. Gromov<sup>1</sup>, and I. I. Nikiforov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>St-Petersburg State University, St. Petersburg, 198504 Russia

A three-component Stäckel model of the Galaxy, including the bulge, disk, and halo, is constructed. Parameter estimates of the potential are obtained as a result of fitting the model rotation curve to azimuthal velocities found from data on trigonometric parallaxes and spatial velocities of masers. The fitting method takes into account the measurement and natural dispersions of azimuthal velocities and uses an algorithm for excluding objects with excessive residuals. In order to obtain more uniform samples, the objects were divided into two groups: masers associated with high-mass star forming regions and masers of other types. A significant kinematic inhomogeneity of these groups was identified and taken into account: the azimuthal velocity dispersion is  $\sigma_{0,1} = 4.3 \pm 0.4 \text{ km s}^{-1}$  in the first group and  $\sigma_{0,2} = 15.2 \pm 1.3 \text{ km s}^{-1}$  in the second. After constructing the model of the galactic-plane potential, it was generalized to the entire space under the assumption of the existence of a third quadratic integral of motion. When reconstructing the galactic rotation curve in detail, the used algorithm gives an analytical expression for the Stäckel potential, which significantly simplifies the task of constructing the Galaxy phase density model in the Stäckel approximation. In order to make the Stäckel model more realistic, one needs to develop methods of direct account of data on the vertical distribution of density in the Galaxy.

Keywords: *methods: analytical—methods: data analysis—Galaxy: structure—Galaxy: kinematics and dynamics*