

К ПРОБЛЕМЕ ПОИСКА ФЛУКТУАЦИЙ БЛЕСКА ПРИ СЧЕТЕ ФОТОНОВ

А. А. Пимонов, В. Ю. Тербиж

Представлены результаты теоретического и экспериментального исследования эффектов мертвого времени, послеимпульсов и прозрачности фильтра при анализе статистических характеристик излучения методом счета фотонов. Индекс дисперсии произвольного потока излучения линейно зависит от прозрачности фильтра и стремится к 1 при ее уменьшении. Показано существование параметров $H_k(t)$, $k=1, 2, \dots$, остающихся инвариантными при прохождении излучения через фильтр. Данные экспериментального исследования реальных трактов регистрации, включающих в качестве светоприемника ФЭУ-79, находятся в согласии с расчетными зависимостями. Указаны ограничения, накладываемые перечисленными выше факторами на решение обратной статистической задачи. Результаты используются при анализе конкретных экспериментов по исследованию временного распределения фотонов.

The results are presented of theoretical and experimental investigations of dead-time effects, postimpulses and filter thickness on the statistical analysis of radiation by photon counting method. The variance index of an arbitrary radiation flux is shown to be linearly depending on the filter thickness, and tends to 1 when the thickness is increasing. The parameters $H_k(t)$, $k=1, 2, \dots$ are found remaining invariant when radiation passes through the filter. The results of the experimental investigation of real registration canals, including photomultiplier as a detector, are consistent with calculated relations. The restrictions on the solution of inverse statistical problem from above-mentioned factors are inferred. The results are applied to the analysis of observations of photon time distribution.

1. Введение. До сих пор при астрономических наблюдениях обычно ограничивались оценкой среднего значения потока излучения от объекта в заданном интервале времени t . При этом переменность блеска понимается как упорядоченное изменение среднего потока в течение промежутка времени, значительно превышающего время накопления t . Достижения последних лет в технике счета отдельных фотонов (в частности, использование ЭВМ на линии со светоприемной аппаратурой) открыли возможности для наблюдений, направленных на изучение временного распределения приходящего от объекта потока фотонов, т. е. позволили перейти к исследованию статистических характеристик излучения. Такая задача возникает, например, при поисках флуктуаций блеска, сравнимых по длительности со средним временем между моментами поступления фотонов [1], и при анализе нерегулярных изменений блеска в тесных двойных системах звезд.

При изучении статистических свойств излучения следует иметь в виду, что распределение событий при регистрации, вообще говоря, отличается от порождающего его распределения фотонов. Это обусловлено прежде всего отличием от нуля мертвого времени тракта регистрации и присутствием послеимпульсов в фотоэлектронном умножителе (ФЭУ), чаще всего служащем приемником излучения. Помимо этого, прохождение излучения перед регистрацией через фильтр с прозрачностью $q < 1$ приводит —

помимо очевидного уменьшения среднего потока — к существенному изменению ряда статистических характеристик потока. Эффективная прозрачность фильтра q определяется многими, часто достаточно неопределенными факторами: земной атмосферой, оптикой телескопа и прибора, квантовым выходом приемника излучения. В связи с этим при решении обратной задачи, заключающейся в восстановлении свойств падающего на фильтр излучения по результатам исследования прошедшего через него излучения, особое значение приобретают величины, не зависящие от прозрачности фильтра (инварианты фильтра).

Целью настоящей работы явилось выяснение ограничений, накладываемых перечисленными выше причинами на решение обратной статистической задачи. Обсуждение ряда конкретных примеров, связанных с прохождением излучения сквозь фильтр, и условия асимптотической пуассоновости процесса регистрации фотонов приводятся в предыдущей нашей заметке [2].

2. Распределение числа фотонов, прошедших через фильтр. Рассмотрим стационарный случайный процесс поступления фотонов на фильтр с прозрачностью q . Пусть $N_t^{(1)}$ — число фотонов, падающих на фильтр в течение промежутка времени длительности t , значительно превышающей время когерентности излучения. Распределение вероятностей $P_1(k, t)$, $k=0, 1, 2, \dots$, случайной величины $N_t^{(1)}$ предполагается заданным. Каждый из поступивших на фильтр фотонов с вероятностью q , не зависящей от числа фотонов, проходит сквозь фильтр и с вероятностью $1-q$ поглощается в нем. Необходимо найти распределение вероятностей $P_q(k, t)$, $k=0, 1, \dots$, числа прошедших через фильтр фотонов $N_t^{(q)}$.

Как легко видеть,

$$P_q(k, t) = \sum_{n=k}^{\infty} P_1(n, t) C_n^k q^k (1-q)^{n-k}, \quad k=0, 1, \dots \quad (1)$$

Вводя производящую функцию вероятностей

$$F_q(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_q(k, t) s^k, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad (2)$$

находим из (1):

$$F_q(s, t) = F_1[1 - q(1-s), t]. \quad (3)$$

Формулы (1)—(3) дают решение прямой задачи о прохождении излучения через фильтр. Вообще говоря, при известных q и $F_q(s, t)$ простая замена переменных в (3) дает формальное решение обратной задачи, однако на практике статистический характер измерений приводит к значительным усложнениям.

Рассмотрим в качестве примера использования (3) случай, когда на фильтр поступает пуассоновский поток фотонов интенсивности ν :

$$P_1(k, t) = e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^k}{k!}; \quad F_1(s, t) = e^{-\nu t(1-s)}. \quad (4)$$

Тогда из (3) следует:

$$F_q(s, t) = e^{-q\nu t(1-s)}, \quad (5)$$

т. е. прошедший через фильтр поток также является пуассоновским потоком интенсивности $q\nu$. С этим известным результатом [3] связано распространенное мнение о том, что фильтр не изменяет статистику излучения. Однако это утверждение справедливо, по-видимому, лишь для строго пуассоновского потока поступления фотонов и для его непосредственного обобщения — пуассоновского процесса со случайной интенсивностью (см. п. 3).

Рассмотрим первые моменты $N_t^{(q)}$. Из основного соотношения (3) следует, что среднее число $M_q(t)$ и дисперсия $\sigma_q^2(t)$ числа прошедших сквозь фильтр в интервале $[0, t]$ фотонов равны:

$$M_q(t) = qM_1(t); \quad (6)$$

$$\sigma_q^2(t) = q(1-q)M_1(t) + q^2\sigma_1^2(t). \quad (7)$$

Известно, что один из наиболее мощных критериев проверки пуассоновости процесса связан с исследованием индекса дисперсии $I(t)$, представляющего собой отношение дисперсии $\sigma^2(t)$ к среднему значению $M(t)$ [4, 5]. В данном случае из (6) и (7) находим связь между индексами дисперсии падающего на фильтр и прошедшего сквозь него потоков излучения

$$I_q(t) - 1 = q [I_1(t) - 1]. \quad (8)$$

Соотношение (8) показывает, что как в случае $I_1(t) < 1$, так и в случае $I_1(t) > 1$ прохождение через фильтр приближает $I(t)$ к 1 — значению,

характерному для пуассоновского процесса (рис. 1).

Как отмечалось выше, представляет интерес нахождение величин, не зависящих от прозрачности фильтра q . Из (7) и (8) видно, что такими величинами не могут служить ни дисперсия, ни индекс дисперсии. Последнее особенно ограничивает возмож-

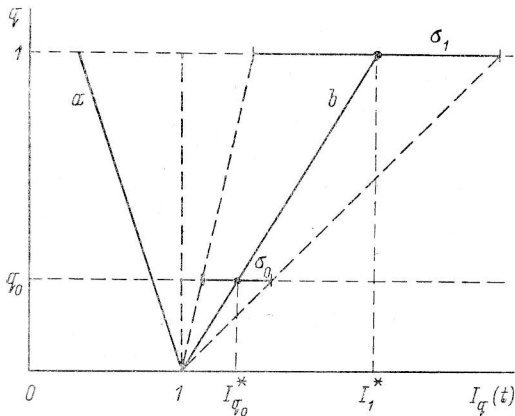


Рис. 1. Зависимость индекса дисперсии от коэффициента пропускания фильтра q .

ности анализа, в связи с тем что теория выборочного распределения индекса дисперсии разработана достаточно полно.

Для того чтобы найти инварианты фильтра, произведем в (3) замену переменных $s = 1 - zM_q^{-1}(t)$. Принимая во внимание (6), получим

$$F_q(1 - zM_q^{-1}, t) = F_1(1 - zM_1^{-1}, t). \quad (9)$$

Это соотношение показывает, что величина

$$H(s, t) \equiv F_q[1 - sM_q^{-1}(t), t] \quad (10)$$

не зависит от q . Очевидно, инвариантами являются и коэффициенты $H_k(t)$ в разложении функции $H(s, t)$ в ряд по степеням s

$$H(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k H_k(t) \frac{s^k}{k!}. \quad (11)$$

Обозначая посредством $F^{(k)}(s, t)$ производную k -го порядка по s , находим из (10) и (11):

$$H_k(t) = \frac{F_q^{(k)}(1, t)}{M_q^k(t)} = \frac{\langle N_t(N_t - 1) \dots (N_t - k + 1) \rangle}{\langle N_t \rangle^k}, \quad (12)$$

где $k = 1, 2, \dots$, и $H_0 \equiv 1$.

Таким образом, инварианты фильтра весьма просто связаны с факториальными моментами величин N_t или $N_t^{(q)}$. Для пуассоновского распре-

деления, как легко проверить, $H(s, t) = e^{-s}$, так что все инварианты тождественно равны 1. Отсюда, в частности, следует, что отличие наблюдаемых значений $H_k(t)$ от 1 может служить критерием отличия процесса излучения фотонов от пуассоновского процесса.

Как показывает (12), для произвольного процесса $H_0 = H_1 = 1$. Первый нетривиальный инвариант $H_2(t)$ можно представить в виде

$$H_2(t) = \frac{\langle N_t(N_t - 1) \rangle}{\langle N_t \rangle^2} = \frac{\sigma^2 - M + M^2}{M^2} = \frac{I(t) - 1}{M(t)} + 1. \quad (13)$$

Действительно, согласно (6), (8), $M(t)$ и $I(t) - 1$ линейно зависят от прозрачности фильтра, так что их отношение не должно зависеть от q . При $k \geq 2$ инвариант k -го порядка выражается через моменты N_t порядка не выше k .

Приведенные выше соотношения справедливы при весьма общих предположениях. Так, процесс поступления фотонов может не удовлетворять условию ординарности, т. е. в бесконечно малый промежуток времени может поступить более одного фотона [2]. Далее, условие стационарности привлекалось лишь для упрощения записи. В случае нестационарного процесса введенные функции зависят от момента начала наблюдения, но все соотношения между ними остаются справедливыми. Наконец, начало интервала времени, в течение которого определяется число событий, может быть выбрано произвольно и, в частности, совпадать с одним из событий.

Помимо изучения распределения числа событий N_t , регистрируемых в течение фиксированных промежутков времени, существует другой метод анализа характеристик случайного процесса, основанный на исследовании распределения длительностей интервалов времени между последовательными событиями T . Эти подходы, вообще говоря, эквивалентны при рассмотрении полных распределений, однако при использовании лишь первых моментов они дают дополнительную информацию о поведении случайного процесса. На практике второй метод ввиду его экономичности иногда предпочитают первому.

К сожалению, получить соотношения между характеристиками распределений длительности интервалов до и после прохождения через фильтр при столь же общих условиях, как и в случае N_t , не удается. Тем не менее эта задача вполне разрешима при рассмотрении несколько менее общих случаев процесса поступления фотонов. Например, в случае стационарного точечного процесса (охватывающего весьма широкий круг приложений) соотношения между распределениями N_t и T известны [5]. Поскольку выше была выяснена связь между распределениями $N_t^{(q)}$ и $N_t^{(1)}$, используя приведенные в [5] результаты, нетрудно получить и соотношения между величинами $T^{(q)}$ и $T^{(1)}$. Отметим, в частности, выражение для плотности распределения длительности интервалов в прошедшем сквозь фильтр потоке излучения

$$f_q(t) = E_q \frac{\partial^2 F_1(1 - q, t)}{\partial t^2}, \quad (14)$$

где $E_q = E_1/q = \frac{t}{qM_1(t)}$ — средняя длина интервала. Другой конкретный случай, когда поток излучения аппроксимируется пуассоновской последовательностью с интенсивностью $\nu(t)$, детерминированно изменяющейся во времени, рассматривался при анализе быстрых флуктуаций блеска объектов в эксперименте «Мания» [1]. При этом величины, не зависящие от прозрачности фильтра, были найдены путем поиска таких комбинаций наблюдаемых величин, которые содержат лишь физические характеристики процесса вспышек.

3. Пуассоновский поток со случайной интенсивностью. Применим найденные выше общие соотношения к случаю, когда процесс поступле-

ния фотонов представляет собой пуассоновскую последовательность с интенсивностью $\nu(t)$, которая сама является стационарным случайным процессом со средним $\langle \nu(t) \rangle = \bar{\nu}$, дисперсией σ_ν^2 и автокорреляционной функцией

$$k(\tau) = \frac{1}{\sigma_\nu^2} [\langle \nu(t) \nu(t+\tau) \rangle - \langle \nu(t) \rangle^2]. \quad (15)$$

Этот пример представляет интерес по двум причинам. Прежде всего, именно пуассоновский процесс со случайной интенсивностью описывает последовательность регистраций при счете фотонов в теории излучения. В связи с этим свойства процесса в последние годы неоднократно исследовались как аналитически, так и путем численного моделирования (см., например, обзор [6]). Во-вторых, как отмечают Кокс и Льюис (15), с. 96), «в ситуациях, когда последовательность событий образует приблизительно пуассоновский процесс, подобный способ задания изменения средней интенсивности является, по-видимому, наиболее общим».

При указанных выше предположениях $\lambda(t) = \int_0^t \nu(t) dt$ представляет собой случайную величину, принимающую значения в интервале $(0, \infty)$. Обозначим плотность распределения $\lambda(t)$ посредством $\varphi(x, t)$. Нетрудно показать, что среднее значение $\langle \lambda(t) \rangle = \bar{\lambda} = \bar{\nu}t$, а дисперсия

$$\sigma_\lambda^2 = 2\sigma_\nu^2 \int_0^t (t-\tau) k(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Обратимся к распределению числа падающих на фильтр фотонов. Рандомизируя пуассоновское распределение по реализациям $\nu(t)$, находим:

$$P_1(k, t) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^k}{k!} \varphi(x, t) dx, \quad k=0, 1, \dots \quad (17)$$

Распределение (17) впервые введено Коксом [7] в связи с задачами прикладной статистики; в физической литературе, имеющей дело с распределением отсчетов при регистрации излучения детекторами, оно именуется распределением Мандела [8, 9].

Среднее число поступающих на фильтр фотонов равно $M_1(t) = \bar{\lambda} = \bar{\nu}t$. Из соотношений (2), (3) и (17) нетрудно найти

$$F_q(s, t) = \int_0^\infty e^{q(s-1)x} \varphi(x, t) dx, \quad 0 \leq q \leq 1. \quad (18)$$

Таким образом, распределение вероятностей числа прошедших сквозь фильтр фотонов также является распределением Мандела со средним $M_q(t) = q\bar{\nu}t$. В данном случае инварианты фильтра определяются следующими выражениями:

$$H_k(t) = M_1^{-k}(t) \int_0^\infty x^k \varphi(x, t) dx = \frac{\langle \lambda^k(t) \rangle}{\langle \lambda(t) \rangle^k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

вытекающими из (12) и (18). В частности, $H_0 = H_1 \equiv 1$ и

$$H_2(t) = 1 + \frac{2}{t^2} \left(\frac{\sigma_\nu}{\bar{\nu}} \right)^2 \int_0^t (t-\tau) k(\tau) d\tau. \quad (20)$$

Для получения наглядного представления о характере изменения H_2 со временем конкретизируем вид автокорреляционной функции. Именно, предположим, что

$$k(\tau) = e^{-\tau/\tau_0}, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (21)$$

где τ_0 — характерное время корреляции изменений средней интенсивности. Тогда

$$H_2 = 1 + \frac{2a^2}{u^2} (e^{-u} + u - 1), \quad (22)$$

где $u = t/\tau_0$ — безразмерное время и $a = \sigma_v/\bar{v}$ — относительная амплитуда переменности. Функция (22) монотонно убывает от значения $1+a^2$ при $t=0$ до 1 при $t \rightarrow \infty$, причем характерное время уменьшения равно τ_0 . Определив из наблюдений поведение $H_2(t)$ в области от $t \ll \tau_0$ до $t \gg \tau_0$, мы можем найти значения параметров a и τ_0 , описывающих свойства исходного потока фотонов. Более тонкие характеристики этого потока можно определить, привлекая более сложные модели переменности и используя инварианты высших порядков.

4. Выборочные распределения. На практике регистрация фотонов производится в течение конечного промежутка времени T_0 . Ввиду этого наблюдаемые характеристики, и в частности инварианты фильтра, являются случайными величинами, распределения которых «стягиваются» к истинным значениям лишь при $T_0 \rightarrow \infty$. Для того чтобы оценить значимость отклонения наблюдаемых значений инвариантов от 1, необходимо знать, насколько типичны отклонения такой величины для пуассоновского потока фотонов, т. е. распределения выборочных значений инвариантов. Ниже мы ограничимся оценкой выборочных характеристик индекса дисперсии и первого нетривиального инварианта $H_2(t)$.

Пусть n_1, n_2, \dots, n_r суть r реализаций пуассоновской случайной величины N_i со средним значением λ . Образует выборочные среднее и дисперсию:

$$\bar{n}(t) = \frac{1}{r} \sum_1^r n_i; \quad s^2(t) = \frac{1}{r-1} \sum_1^r (n_i - \bar{n})^2, \quad (23)$$

а также индекс дисперсии и инвариант:

$$\bar{I}(t) = s^2/\bar{n}; \quad \bar{H}_2(t) = \frac{\bar{I}(t) - 1}{\bar{n}(t)} + 1. \quad (24)$$

Основные результаты, относящиеся к распределению $\bar{I}(t)$, заключаются в следующем [4, 5]. При $n = \sum_1^r n_i \gg 1$ распределение величины $(r-1)\bar{I}$ хорошо аппроксимируется χ^2 -распределением с числом степеней свободы $f = r-1$. В соответствии с этим первые моменты выборочного индекса дисперсии при $n \gg 1$ равны

$$\langle \bar{I}(t) \rangle = 1; \quad \sigma^2[\bar{I}(t)] = 2/(r-1), \quad (25)$$

так что $\bar{I}(t)$ является несмещенной и состоятельной оценкой истинного индекса дисперсии.

Задача о нахождении выборочного распределения $\bar{H}_2(t)$ ранее не рассматривалась. Оценку дисперсии \bar{H}_2 можно получить, воспользовавшись правилами приближенного переноса ошибок [10]. Имеем из (24):

$$\sigma^2(\bar{H}_2) \approx \left(\frac{1}{\bar{n}_0}\right)^2 \sigma^2(\bar{I}) + \left(\frac{\bar{I}_0 - 1}{\bar{n}_0^2}\right)^2 \sigma^2(\bar{n}), \quad (26)$$

где индекс «0» указывает, что соответствующие величины следует заметить средними значениями. Поскольку $\langle \bar{n} \rangle = \lambda$, из (25) и (26) следует

$$\sigma^2(\bar{H}_2) \approx \frac{2}{(r-1)\lambda^2} \approx \frac{2}{(r-1)\bar{n}^2}. \quad (27)$$

Таким образом, точность оценки H_2 зависит не только от числа измерений r (как в случае индекса дисперсии), но и от средней интенсивности потока.

Для проверки точности соотношения (27), играющего важную роль в проблеме поиска флуктуаций блеска, мы воспользовались методом Монте-Карло. При помощи генератора случайных чисел на ЭВМ типа СМ-3 для каждого из трех значений λ (3, 15 и 60) были моделированы $N=750$ выборок пуассоновской случайной величины $\{n_1, \dots, n_r\}$ объема $r=20, 400$. Для отдельных выборок по формулам (23) и (24) определялись значения \bar{H}_2 , так что каждой паре значений (λ, r) отвечало 750 реализаций инварианта \bar{H}_2 . Средние значения $\langle \bar{H}_2 \rangle$ и дисперсии $\sigma^2(\bar{H}_2)$, найденные

Параметр	r	$\lambda = 3$	$\lambda = 15$	$\lambda = 60$
$\langle \bar{H}_2 \rangle$	20	1.00083 ± 0.00395	1.00024 ± 0.00079	1.00005 ± 0.00020
$\sigma^2(\bar{H}_2)$	20	0.01140 (0.01170)	0.00050 (0.00047)	0.0000299 (0.0000292)
$\langle \bar{H}_2 \rangle$	400	1.00077 ± 0.00086	1.00018 ± 0.00017	
$\sigma^2(\bar{H}_2)$	400	0.00057 (0.00056)	0.000022 (0.000022)	

по реализациям, приведены в таблице. Стандартное отклонение среднего оценивалось по формуле $\sigma[\langle \bar{H}_2 \rangle] = \sigma(\bar{H}_2) / \sqrt{N}$. В скобках указаны значения дисперсии $\sigma^2(\bar{H}_2)$, найденные по формуле (27). Как показывают данные таблицы, соотношение (27) имеет достаточную для использования на практике точность.

5. Влияние послеимпульсов в фотоэлектронном умножителе на статистику фотоотчетов. Известно (см., например, [11]), что на выходе диодной системы ФЭУ каждому фотоэлектрону соответствует группа отсчетов, состоящая из основного импульса и набора послеимпульсов. Обозначим посредством m_1 и σ_1^2 соответственно среднее и дисперсию числа фотоотчетов в группе. Пусть, далее, $m_2(t)$ и $\sigma_2^2(t)$ означают среднее и дисперсию числа фотоэлектронов, поступивших в течение интервала времени $[0, t]$ с катода на вход диодной системы. Как показано в [2], первые моменты полного числа фотоотчетов, поступивших с анода ФЭУ в течение интервала $[0, t]$, определяются выражениями:

$$\begin{aligned} m(t) &= m_1 m_2(t); \\ \sigma^2(t) &= m_1^2 \sigma_2^2(t) + m_2(t) \sigma_1^2, \end{aligned} \quad (28)$$

откуда

$$\begin{aligned} I(t) &= I^{(1)} + m_1 I^{(2)}(t); \\ H_2(t) &= \frac{1}{m_2(t)} H_2^{(1)} + H_2^{(2)}(t). \end{aligned} \quad (29)$$

Для пуассоновского входного потока излучения $I^{(2)}(t) = H_2^{(2)}(t) \equiv 1$, и формулы (29) принимают вид:

$$\begin{aligned} I(t) &= I^{(1)} + m_1; \\ H_2(t) &= 1 + H_2^{(1)} / m_2(t). \end{aligned} \quad (30)$$

Заметим, что при отсутствии послеимпульсов $m_1 = 1$, $\sigma_1^2 = 0$, так что $I^{(1)} = H_2^{(1)} = 0$, $I(t) = H_2(t) = 1$.

Соотношения (30) показывают, что влияние послеимпульсов по-разному сказывается на индексе дисперсии и инварианте. Именно, величина

$I(t)$ полностью определяется распределением послеимпульсов, в то время как $H_2(t)$ зависит еще и от интенсивности входного потока. В связи с этим выбор основного параметра должен диктоваться характером рассматриваемой задачи. Отметим, что в области t , определяемой неравенством $m_2(t) \ll H_2^{(1)}$, величина $H_2(t)$ может быть существенно искажена послеимпульсами.

Второе замечание касается зависимости числа послеимпульсов от напряжения питания ФЭУ V . По данным работы [12], для умножителя типа ФЭУ-79 указанная зависимость прослеживается довольно определенно; в частности, при $V=2000$ В количество послеимпульсов может составить до 10% общего числа фотоотсчетов на выходе диодной системы.

Для иллюстрации величин искажений статистики, вносимых послеимпульсами, рассмотрим работу ФЭУ-79 при $V=2000$ В. Примем $m_1=1.075$ и допустим, что появление одного, двух и трех послеимпульсов равновероятно. Тогда $\sigma_1^2=0.17$, и из (30) находим: $I(t)=1.23$, $H_2(t)=1+0.22/m_2(t)$. Условие заданной точности измерений $H_2(t)$ очевидным образом ограничивает снизу допустимые значения времени накопления t .

6. Эффекты мертвого времени. Отличие от нуля мертвого времени тракта регистрации при счете фотонов приводит к тому, что, во-первых, регистрируются не все поступающие на вход импульсы и, во-вторых, последовательность зарегистрированных импульсов обнаруживает статистическую зависимость даже в том случае, когда на счетчик поступает пуассоновская последовательность импульсов. Обозначим мертвое время посредством τ , среднее число поступающих за 1 с импульсов — через ν , среднее число и дисперсию числа зарегистрированных в интервале $[0, t]$ импульсов — соответственно через $M(t)$ и $\sigma^2(t)$.

Задания лишь величины мертвого времени недостаточно для описания работы тракта регистрации. Обычно приборы, используемые для счета частиц, с хорошим приближением можно отнести к двум типам: счетчиков с непродлевающим и продлевающим мертвым временем или соответственно I и II типа. В обоих типах счетчиков поступающие в течение мертвого времени импульсы не регистрируются, однако в счетчиках I типа эти импульсы не удлиняют мертвое время, тогда как в счетчиках II типа — удлиняют.

Фотоэлектронный умножитель, чаще всего используемый при счете фотонов, естественно рассматривать как счетчик II типа. Следует, однако, иметь в виду, что различные узлы импульсного усилителя и дискриминатора могут работать в режиме, близком как к счетчикам II типа, так и к счетчикам I типа. Поэтому вопрос о характере работы типичного тракта регистрации, включающего ФЭУ, требует специального исследования. Эмпирическую зависимость числа просчетов от интенсивности поступающего потока исследовал недавно Ферни [13].

Общая теория счетчиков I и II типов при условии, что моменты поступления импульсов образуют пуассоновскую последовательность, разработана Феллером в 1948 г. [14]; ее изложение можно найти в [15]. В интересующем нас случае, когда время наблюдения t значительно превосходит как τ , так и среднее время между поступающими импульсами ν^{-1} , имеем для счетчиков I типа:

$$\begin{aligned} M(t) &= \nu t / (1 + \nu \tau); \\ \sigma^2(t) &= \nu t / (1 + \nu \tau)^2 \end{aligned} \quad (31)$$

и для счетчиков II типа:

$$\begin{aligned} M(t) &= \nu t \exp(-\nu \tau); \\ \sigma^2(t) &= \nu t \exp(-\nu \tau) [1 - 2\nu \tau \exp(-\nu \tau)]. \end{aligned} \quad (32)$$

Выражения для среднего числа зарегистрированных импульсов можно получить из простых вероятностных соображений; формулы для дисперсии значительно менее очевидны.

Вводя, как и выше, индекс дисперсии I и величину H_2 , находим:

$$I = 1/(1 + \nu\tau)^2; \quad (33)$$

$$H_2 = 1 - \frac{\tau}{t} \cdot \frac{2 + \nu\tau}{1 + \nu\tau}$$

— для счетчиков I типа и

$$I = 1 - 2\nu\tau \exp(-\nu\tau); \quad (34)$$

$$H_2 = 1 - 2 \frac{\tau}{t}$$

— для счетчиков II типа. Как и наличие послеимпульсов, отличие от 0 мертвого времени приводит к появлению явной зависимости инварианта H_2 от длительности времени накопления t . Для того чтобы избежать искажений H_2 эффектами мертвого времени, необходимо ограничиться значениями времени накопления t , существенно превышающими мертвое время τ .

Зависимость наблюдаемой средней скорости счета $m = M(t)/t$ от ν и зависимость индекса дисперсии от параметра νt представлены на рис. 2, 3. В счетчиках I типа при $\nu t \gg 1$ импульсы располагаются вплотную друг за другом и число их за 1 с не может, очевидно, превышать $1/\tau$. Для счетчиков II типа

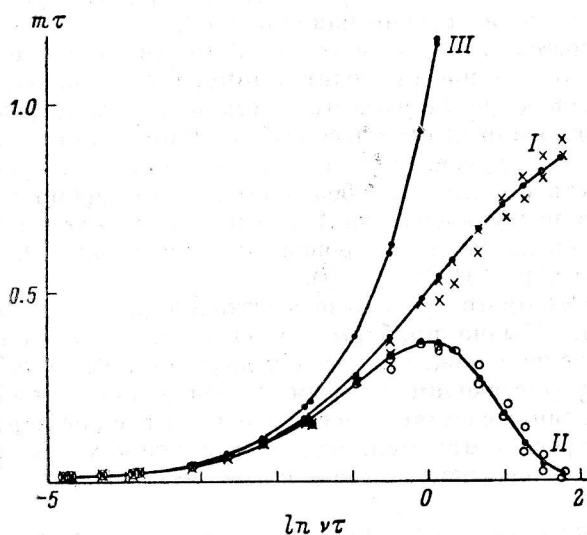


Рис. 2. Зависимость индекса дисперсии от интенсивности входного потока для каналов I—III.

уменьшение реального времени, в течение которого счетчик способен регистрировать поступающие импульсы, начинает преобладать при $\nu\tau > 1$, и число зарегистрированных импульсов начинает уменьшаться с увеличением входного потока. Естественно также непрерывное уменьшение индекса дисперсии с ростом $\nu\tau$ для счетчиков I типа — последовательность регистрируемых импульсов становится все более регулярной. Для счетчиков II типа $I(\nu\tau)$ уменьшается вплоть до $\nu\tau=1$, однако в дальнейшем с ростом частоты поступающих импульсов периоды реального мертвого времени становятся столь продолжительными, что последовательные регистрируемые импульсы можно считать независимыми и $I(\nu\tau)$ вновь приближается к 1 — значению, характеризующему пуассоновский процесс.

Иногда наблюдатели указывают, что «точность» их измерений превышает пуассоновскую, т. е. разброс числа регистрируемых импульсов $\sigma(t)$ меньше квадратного корня из среднего числа импульсов $M^{1/2}(t)$. Из предыдущего ясно, что такая ситуация реализуется, если наблюдения ведутся в нелинейной области $\nu\tau \sim 1$. При этом следует учитывать два обстоятельства: 1) необходимо вводить поправку за просчеты и 2) действительное отношение сигнала к шуму меньше аналогичного отношения в линейной области [3, с. 187]. Именно в связи с недостаточной осведомленностью наблюдателей в этой области мы несколько подробнее, чем это требуется для данного исследования, остановились на интерпретации зависимостей, представленных на рис. 2, 3.

В заключение отметим положительное обстоятельство, связанное с наличием мертвого времени. Если средняя продолжительность следования группы послеимпульсов t_0 меньше мертвого времени τ , то число фотоотсчетов в группе m_1 , зарегистрированное счетчиком, равно 1; дисперсия $\sigma_1^2=0$ и влияние послеимпульсов в ФЭУ на статистику фотоотсчетов аннулируется.

7. Реальный тракт регистрации. Приведенные выше результаты охватывают идеализированные случаи. Реальный тракт регистрации включает в качестве первого звена фильтр, в качестве второго — диодную систему ФЭУ с послеимпульсами и в качестве третьего — счетчик с отличным от 0 мертвым временем. Аналитическое рассмотрение, использованное выше для выделения основных особенностей каждого из процессов, при необходимости может быть использовано и при анализе реального тракта регистрации. Мы не будем приводить ожидаемые в этом случае зависимости и обратимся непосредственно к данным эксперимента.

Целью эксперимента явилось исследование статистических характеристик реальных трактов регистрации (каналов): I — с мертвым временем $\tau=$

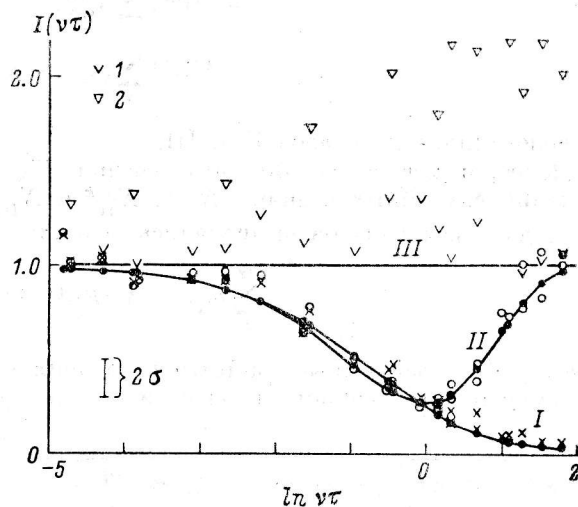


Рис. 3. Зависимость среднего потока с выходов каналов I—III от интенсивности входного потока.

1 — 1540, 2 — 2030 В.

$=10^{-5}$ с непродлевающего типа; II — с мертвым временем $\tau=10^{-5}$ с продлевающего типа и III — с мертвым временем $\tau=4 \cdot 10^{-7}$ с непродлевающего типа. Для выявления вклада послеимпульсов в статистику фотоотсчетов эксперимент проводился при двух напряжениях питания ФЭУ. Первое напряжение выбиралось на начальном участке плато счетной характеристики и равнялось 1540 В, второе было выбрано равным 2030 В. Блок-схема эксперимента представлена на рис. 4.

На вход электрофотометра первичного фокуса БТА [16] поступает пуассоновский поток фотонов постоянной интенсивности. Такой поток формируется лампой накаливания, работающей в микротоковом режиме. Изменение интенсивности потока осуществляется изменением тока питания лампы. Поток фотоотсчетов с выхода электрофотометра поступает на блок многоканального пересчета ЛРН 4853 импульсного анализатора ЛР 4840 фирмы «НОКИА» и на входы формирователей I и II с мертвым временем 10^{-5} с непродлевающего и продлевающего типов соответственно. С выходов формирователей поток фотоотсчетов также поступает на входы блока ЛРН 4853. Для обеспечения нормальной работы формирователей I и II на выходе электрофотометра пришлось формировать импульсы длительностью $3 \cdot 10^{-7}$ с, что обеспечило каналу III мертвое время $4 \cdot 10^{-7}$ с непродлевающего типа.

Эксперимент сводился к подсчету при фиксированном напряжении питания ФЭУ и фиксированной интенсивности входного потока числа фотоотсчетов, поступивших по каналам I, II и III за последовательные интервалы времени наблюдения длительностью 1 с. В результате для напряжений V_k и интенсивностей v_j входного потока фотонов в памяти ана-

лизатора по каналам I, II и III соответственно формировались массивы чисел фотоотсчетов:

$$\left. \begin{array}{l} n_{I,1}^{j,k}, \dots, n_{I,198}^{j,k} \\ n_{II,1}^{j,k}, \dots, n_{II,198}^{j,k} \\ n_{III,1}^{j,k}, \dots, n_{III,198}^{j,k} \end{array} \right\}, \quad k=1, 2; \quad j=1, 2, \dots, 17. \quad (35)$$

Эти массивы выводились на перфоленту и подвергались дальнейшей обработке на ЭВМ типа М 222.

Первым этапом обработки являлось вычисление выборочных средних и дисперсий массивов (35) по формулам:

$$\bar{n}_I^{j,k} = (1/198) \sum_{i} n_{I,i}^{j,k}; \quad (36)$$

$$s_{j,k,I}^2 = (1/197) \sum_{i} (n_{I,i}^{j,k} - \bar{n}_I^{j,k})^2, \quad (37)$$

и аналогично для каналов II и III.

Далее, в предположении, что массивы (35) образуют выборки по 198 значений случайных величин $N_I^{j,k}$, $N_{II}^{j,k}$ и $N_{III}^{j,k}$, распределенных по Пуассону, для трех каналов вычислялись величины

$$\chi_{j,k}^2 = \sum_{i=1}^{12} (\mu_i^{j,k} - 198P_i^{j,k})^2 / 198P_i^{j,k}. \quad (38)$$

Здесь $\mu_i^{j,k}$ — выборочные частоты попадания в соответствующую группу, а разбиение на группы производилось по условию, что $198P_i^{j,k} \geq 16$

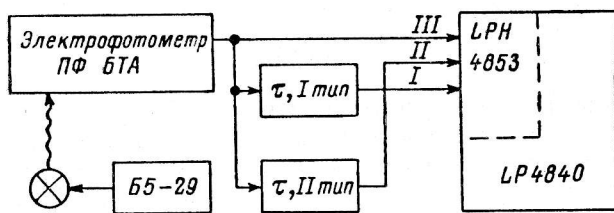


Рис. 4. Блок-схема эксперимента.

в каждой группе для пуассоновского распределения при средних значениях (36).

По результатам (36) и (37) вычислялись значения индексов дисперсии

$$I_I^{j,k} = s_{j,k,I}^2 / \bar{n}_I^{j,k}. \quad (39)$$

Из выражений (25) следует, что в данном случае

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= 1; & \sigma^2(I) &= 0,01; \\ \langle \chi^2 \rangle &= 11; & \sigma^2(\chi^2) &= 22. \end{aligned} \quad (40)$$

Учитывая, что мертвое время канала III много меньше мертвых времен каналов I и II, интенсивность фотоотсчетов $\bar{n}_{III}^{j,k}$ в (36) считалась истинной входной интенсивностью для каналов I и II. Поэтому окончательный результат обработки представлялся в виде зависимостей

$$\left. \begin{array}{l} \bar{n}_I^{j,k} (\bar{n}_{III}^{j,k}) \\ I_I^{j,k} (\bar{n}_{III}^{j,k}) \\ \chi_{j,k}^2 (\bar{n}_{III}^{j,k}) \end{array} \right\} \text{ для I, II, III.} \quad (41)$$

Логарифмический масштаб по некоторым осям рисунков выбран для наглядности представления. На графиках сплошной линией нанесены теоретические кривые; результаты эксперимента нанесены отдельными точками. Дисперсия на графиках указана в соответствии с (40).

Зависимость индекса дисперсии от интенсивности входного потока представлена на рис. 2. Для каналов I и II с мертвым временем 10^{-5} с экспериментальные точки в пределах дисперсии повторяют ход теоретических кривых для обоих напряжений питания ФЭУ. Это означает, что искажения статистики фотоотчетов тракта регистрации с мертвым временем $\tau > 10^{-5}$ с любого типа определяются выражениями (33) и (34) при произвольных напряжениях питания. Канал III ведет себя иначе. Наличие послеимпульсов даже при $V=1540$ В приводит к существенному увеличению индекса дисперсии. Более того, величина $I(t)$ для III канала существенно зависит от интенсивности входного потока.

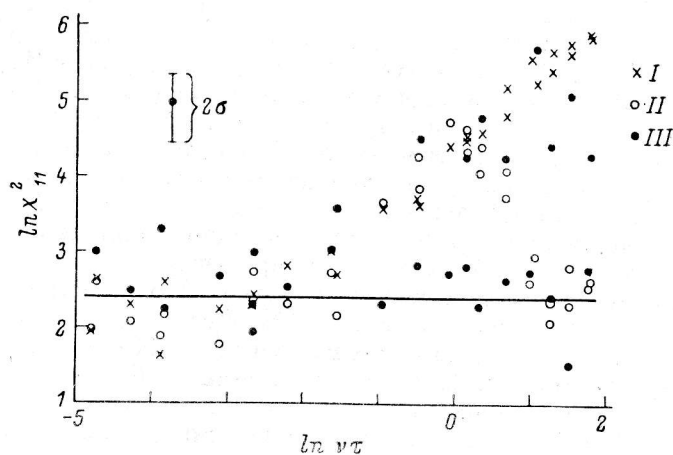


Рис. 5. Зависимость величины χ^2 от интенсивности входного потока для каналов I—III.

Так, при $V=1540$ В индекс дисперсии меняется от 1 до 1.4, а при $V=2030$ В — уже от 1.4 до 2.2. Сильная зависимость индекса дисперсии подтверждает выводы [12] об искажениях статистики фотоотчетов, вызванных послеимпульсами, и является аргументом в пользу минимальных рабочих напряжений на ФЭУ. Зависимость же величины $I(t)$ от интенсивности входного потока является несколько неожиданным результатом, вносящим дополнительную нелинейность в выражение (29). По-видимому, эта зависимость связана с увеличением количества газов в колбе ФЭУ при увеличении интенсивности засветки. Возможно также, что эффект Молтера [11] показывает такую зависимость.

Таким образом, можно констатировать, что при изучении статистики фотонов с помощью тракта регистрации с мертвым временем $\tau < 5 \cdot 10^{-7}$ с, во-первых, необходимо работать при минимальном напряжении питания ФЭУ и, во-вторых, наличие послеимпульсов накладывает ограничения на минимальные обнаружимые отклонения статистики от пуассоновской.

Рис. 5, где представлена зависимость величины χ^2 от интенсивности входного потока, иллюстрирует сказанное выше с точки зрения критерия χ^2 . Экспериментальное распределение сравнивалось по χ^2 -критерию с теоретическим распределением Пуассона при тех же интенсивностях. Следует отметить, что при используемых в настоящей работе объемах выборок выводы об отличии экспериментального распределения от пуассоновского по индексу дисперсии оказываются более надежными, чем по χ^2 -критерию.

Некоторое смещение экспериментальных точек каналов I и II на рис. 2 по отношению к теоретической кривой и относительно друг друга вызвано

наличием послеимпульсов. Этот график строился в предположении, что интенсивность потока, поступающего по каналу III, является пуассоновской. В действительности послеимпульсы несколько сместили среднее значение.

8. Обратная задача. Конечной целью наблюдений является восстановление статистических свойств излучения из анализа распределения событий на выходе реального тракта регистрации.

Учитывая приведенные выше результаты, можно подобрать параметры тракта регистрации таким образом, чтобы избежать влияния послеимпульсов. Например, для наиболее распространенного в астрономических наблюдениях умножителя типа ФЭУ-79 время прохождения группы послеимпульсов $t_0 \approx 8 \cdot 10^{-6}$ с [11, 12]. Выбирая мертвое время $\tau \geq 10^{-5}$ с, мы существенно ослабляем ограничения на поиск слабых флуктуаций блеска, накладываемые послеимпульсами.

С другой стороны, при значительном мертвом времени аппаратуры просчеты могут привести к тому, что результирующие характеристики будут нелинейно зависеть от входного потока [см. (31)–(34)]. Очевидно, что решение обратной задачи с учетом приведенных в п. 6 соотношений в нелинейной области весьма затруднительно. Кроме того, как уже указывалось, в этой области уменьшается отношение сигнала к шуму. Поэтому яркость объектов и время накопления следует выбирать таким образом, чтобы избежать наблюдений в нелинейной области. Предельную допустимую яркость легко рассчитать в каждом конкретном случае. Например, тракт регистрации с мертвым временем $\tau = 10^{-5}$ с при широкополосной фотометрии с телескопом диаметром 6 м позволяет еще наблюдать звезды 16^m5 на уровне просчетов 1%. Доступная область значений времени накопления t в данном случае, согласно (33) и (34), определяется неравенством $t \geq 10^{-4}$ с. При необходимости наблюдать более яркие объекты следует использовать тракт с малым τ , но тогда коэффициенты выражений (29) должны быть тщательно изучены для каждого экземпляра ФЭУ при выбранном напряжении питания.

Рассмотрим ограничения, связанные с конечной прозрачностью «фильтра». Как уже отмечалось выше, ряд параметров, которые могут быть использованы при анализе распределений (например, индекс дисперсии), зависят от прозрачности q , так что уже переход к оценкам свойств излучения на внешней стороне атмосферы сопряжен со значительной неопределенностью. Действительно, пусть $I_{q_0}^*$ и σ_0 — оценки индекса дисперсии и его стандартного отклонения для излучения, прошедшего через фильтр прозрачности q_0 . Согласно (8), аналогичные величины для входящего излучения определяются соотношениями:

$$I_1^* = 1 + (1/q_0) [I_{q_0}^* - 1], \quad \sigma_1 = \sigma_0/q_0. \quad (42)$$

Ослабление ограничений, накладываемых на оценку I_1^* в соответствии с (42), иллюстрируется рис. 1. Для ориентировочных оценок можно воспользоваться следующими расчетами. Предположим, что необходимо найти отличие $I_1^*(t)$ от 1 в области промежутков времени длиной t на уровне $\sigma_1 = \theta$. Тогда точность наблюдений прошедшего через фильтр излучения должна составлять $\sigma_0 = q_0 \theta$, для чего, согласно (25), необходимо провести $r = 1 + 2/(q_0 \theta)^2$ измерений числа фотонов, занимающих чистое время

$$T(t, \theta) = [1 + 2/(q_0 \theta)^2] t. \quad (43)$$

В частности, при $t = 10^{-3}$ с, $\theta = 0.05$ и $q_0 = 0.01$ получаем $T \approx 10^4$ с.

Таким образом, анализ статистических свойств излучения должен опираться в основном на распределения инвариантов фильтра $H_k(t)$. Рассмотрим в качестве примера задачу о выделении непуассоновской компоненты излучения. Пусть исходный поток фотонов состоит из суммы двух компонент с интенсивностями ν' и $\nu'' = \epsilon \nu'$, индексами дисперсии I' и I'' ,

параметрами H'_2 и H''_2 . Нетрудно показать, что для результирующего потока излучения

$$\begin{aligned} I - 1 &= \frac{(I' - 1) + \varepsilon(I'' - 1)}{1 + \varepsilon}; \\ H_2 - 1 &= \frac{(H'_2 - 1) + \varepsilon^2(H''_2 - 1)}{(1 + \varepsilon)^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Предположим теперь, что излучение с интенсивностью ν' представляет собой пуассоновский поток. Тогда $I' = H'_2 = 1$ и мы получаем:

$$\begin{aligned} I_q - 1 &= q\delta(I'' - 1); \\ H_2 - 1 &= \delta^2(H'' - 1), \end{aligned} \quad (45)$$

где $\delta = \varepsilon/(1 + \varepsilon)$ — доля непуассоновской компоненты в суммарном потоке.

Последнее соотношение показывает, что сравнительно небольшая добавка непуассоновской компоненты довольно слабо проявляется в интегральном потоке. Так, при $\delta = 10\%$ отличие результирующего инварианта H_2 от 1 в 100 раз меньше, чем отличие от 1 инварианта для добавочного излучения. Полное время накопления при измерении инварианта H_2 с заданной точностью $\sigma(\bar{H}_2) = \theta$ определяется соотношением (27):

$$T(t, \theta) = [1 + 2/(\theta\bar{n})^2] t. \quad (46)$$

Например, при потоке от объекта $\nu = 100$ имп/с, интервале измерения $t = 10^{-3}$ с и точности $\theta = 0.05$ получаем $T \approx 80$ с. Если характерное время переменности заранее неизвестно, то поиски приходится вести в широком диапазоне промежутков t . Из (46) следует, что при этом необходимо выполнить длительный ряд измерений или же использовать специальную аппаратуру [17], позволяющую изменять t при обработке накопленных массивов.

Авторы признательны В. Ф. Шварцману и Г. М. Бескину за полезные обсуждения.

Список литературы

1. В. Ф. Шварцман. — Сообщ. САО, 1977, 19, 5.
2. А. А. Пимонов, В. Ю. Терещенко. — Сообщ. САО, 1979, 25, 17.
3. В. И. Гольданский, А. В. Куценко, М. И. Подгорецкий. Статистика отсчетов при регистрации ядерных частиц. М., Физматгиз, 1959.
4. R. A. Fisher. — Biometrics, 1950, 6, 17.
5. Д. Кокс, П. Льюис. Статистический анализ последовательностей событий. М., Мир, 1969.
6. C. L. Mehta. — Progress in Optics, ed. E. Wolf, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam—London, 1970, 8, 375.
7. D. R. Cox. — J. R. Statist. Soc., B, 1955, 17, 129.
8. L. Mandel. — Proc. Phys. Soc. (London), 1958, 72, 1037.
9. L. Mandel. — Proc. Phys. Soc. (London), 1959, 74, 233.
10. Д. Хадсон. Статистика для физиков. М., Мир, 1970.
11. А. Н. Перцев, А. Н. Писаревский. Одноэлектронные характеристики ФЭУ и их применение. М., Атомиздат, 1971.
12. А. А. Пимонов. — Сообщ. САО, 1978, 23, 43.
13. J. D. Fernie. — Publ. Astr. Soc. Pacific, 1977, 88, N 526, 969.
14. W. Feller. — Courant Anniversary Volume, Interscience Publishers, New York, 1948, 105.
15. А. Т. Баруча-Рид. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М., Наука, 1969.
16. С. И. Неизвестный, А. А. Пимонов. — Сообщ. САО, 1978, 23, 56.
17. А. А. Пимонов. — Сообщ. САО, 1979, 25, 31.